ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 21 | Juni 1941 | Heft 3

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten.

Abhandlungen zur Hydrodynamik IX.

Von *Georg Hamel* in Berlin.

Es werden die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten, die es bekanntlich gibt, die aber des Haftens am Rande wegen gewöhnlich beiseite gelassen werden, genauer auf den Energieaustausch hin untersucht. Für die ebene Bewegung findet sich die einfache Formel (9) der inneren Leistung, die ebenso einfache Formel (10) der äußeren Leistung. Natürlich sind beide entgegengesetzt gleich, was aus dem komplex geschriebenen Greenschen Satz sofort folgt. Die Randbedingung des Haftens muß durch Nachgeben des eingebetteten Körpers erreicht werden. Deshalb erscheint die im zweiten Teil behandelte Frage von Interesse, ob es Zylinder gibt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit am Rande. Dieses Problem führt auf eine quadratische Randwertaufgabe (4), (5), von der aber nur die triviale Lösung des Kreiszylinders angegeben werden kann. Nachbarlösungen dazu gibt es in einem bestimmten Sinne nicht.

Bekanntlich sind Potentialbewegungen volumbeständiger Flüssigkeiten mögliche Bewegungen zäher Flüssigkeiten; sie werden aber meist außer acht gelassen, da erstens zähe Flüssigkeiten an den Wänden haften müssen, daher nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie die Flüssigkeit in Ruhe bleibt, falls die Wände sich nicht bewegen und da zweitens die im Falle der Potentialbewegung auch für zähe Flüssigkeiten geltende Bernoullische Gleichung zu zeigen scheint, daß ein Energieaustausch nicht anders stattfindet als bei idealen Flüssigkeiten.

Beides ist ein Vorurteil: erstens gibt es auch bewegte Wände, die nicht starr zu sein brauchen, sich also umgekehrt der Bewegung der Flüssigkeit anpassen können, und zweitens gibt die Bernoullische Gleichung nicht den wahren Energieaustausch, tut dies vielmehr nur für eine Ersatzdynamik, in der die wahren Kräfte durch ihre Resultierende ersetzt sind. Und das ist energetisch nicht dasselbe, wie elementare Beispiele leicht zeigen.

Im folgenden soll zuerst der Energieaustausch, namentlich im Falle der ebenen Potentialbewegung zäher Flüssigkeiten genauer untersucht und an Beispielen erörtert werden. Zweitens stellen wir die Frage, ob es zylindrische Körper gibt, um die eine Potentialbewegung so statt-

findet, daß an der Oberfläche die Winkelgeschwindigkeit konstant ist. Diese Frage führt auf eine neuartige Randwertaufgabe der Funktionentheorie. Es zeigt sich, daß unter gewissen Voraussetzungen der Kreiszylinder die einzige Lösung ist, wenigstens in dem Sinne, daß es zu ihm keine Nachbarlösungen gibt. (Die genaue Formulierung des Satzes am Schlusse der Arbeit.)

Teil I. Der Energieausgleich.

1. Bekannte Tatsachen. Die Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten lassen sich bekanntlich so schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} - \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} + g\,h\right) + \nu\,\Delta\,\mathfrak{v} \quad \text{(1)},$$

wo $\mathfrak{v}$ den Vektor der Geschwindigkeit, p den Druck, ϱ die konstante Dichte, ν die (konstante) kinematische Zähigkeit, h die Höhe, g die Erdbeschleunigung bedeutet. Dazu kommt die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \quad \text{(2)}.$$

Man erkennt sofort die Möglichkeit der Potentialbewegung mit

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi \quad \text{und also} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0,$$

wodurch sich (1) zur Bernoullischen Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} + g\,h = C(t) \quad \text{(3)}$$

integriert. Denn es ist ja $\Delta\,\mathfrak{v} = \Delta \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \Delta\,\varphi = 0$, was wegen (2) zutrifft.

Das Glied $\nu\,\Delta\,\mathfrak{v}$ rührt von den inneren Spannungen der Zähigkeit her, von dem Tensor $X_x, X_y = Y_x, X_z = Z_x$ etc ... Z_z, wobei

$$X_x = 2\,\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad X_y = Y_x = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \text{ ist, usw.} \quad \text{(4)}.$$

η ist der Koeffizient der inneren Reibung, $\eta = \varrho\,\nu$. v_x, v_y, v_z sind die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{v}$. Nun sind bekanntlich die Spannungskoordinaten X_n, Y_n, Z_n für ein Flächenelement $\mathrm{d}F$ mit der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \quad \text{usw.}$$

und somit ist die von außen auf einen abgeschlossenen Teil der Flüssigkeit übertragene Leistung der Zähigkeitsspannungen

$$L_a = \oint (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z)\,\mathrm{d}F \quad \text{(5)}.$$

Die innere Leistung ist aber bekanntlich das Volumintegral

$$\left.\begin{aligned} L_i = & -\int\left[X_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + X_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + Y_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right. \\ & \left. + Y_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + Z_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\mathrm{d}V \\ = & -\eta\int\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2\right\}\mathrm{d}V\,[1] \end{aligned}\right\} \quad \text{(6)}$$

und das ist stets negativ und nur Null bei starrer Bewegung. In allen anderen Fällen wird also von der inneren Reibung im Innern der Flüssigkeit Energie verbraucht.

Wenn nun ein Potential φ da ist, nimmt (6) die Form an

$$L_i = -2\,\eta\int\left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right\}\mathrm{d}V.$$

2. Leistungsformeln im Falle der ebenen Potentialbewegung. Im Falle der ebenen Bewegung ist

$$L_i = -2\,\eta\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

[1] Siehe z. B. Lamb-Friedel: Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig und Berlin (1907), S. 668.

und wenn wir das komplexe Potential

$$\varphi + i\,\psi = f(x + i\,y)$$

einführen, ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = f' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + i\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = f'' = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} &= \overline{f''} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Daher ist

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = f''\,\overline{f''}$$

und wir bekommen für die innere Leistung die einfache Formel

$$L_i = -4\,\eta \iint f''\,\overline{f''}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Alle diese Integrale sind hier und hinfort je Einheit der dritten Dimension verstanden.

Auch für die äußere Leistung (5) bekommen wir einen überaus einfachen Ausdruck. Aus (5) wird zunächst mit $\mathrm{d}s$ als Bogenelement

$$\begin{aligned} L_a &= \oint (X_n v_x + Y_n v_y)\,\mathrm{d}s = \oint \{[X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y)]\,v_x \\ &\quad + [Y_x \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y)]\,v_y\}\,\mathrm{d}s = \oint (X_x v_x + Y_x v_y)\,\mathrm{d}y - (X_y v_x + Y_y v_y)\,\mathrm{d}x \\ &= \eta \oint \left[2\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\,v_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) v_y\right] \mathrm{d}y - \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) v_x + 2\,\frac{\partial v_y}{\partial y}\,v_y\right] \mathrm{d}x \\ &= 2\,\eta \oint \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \mathrm{d}y - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \\ &= \eta \int \frac{\partial}{\partial x}(f'\,\overline{f'})\,\mathrm{d}y - \frac{\partial}{\partial y}(f'\,\overline{f'})\,\mathrm{d}x \\ &= \eta \oint (f''\,\overline{f'} + f'\,\overline{f''})\,\frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar z}{2\,i} - i\,(f''\,\overline{f'} - f'\,\overline{f''})\,\frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar z}{2} \\ &= \frac{\eta}{i} \oint f''\,\overline{f'}\,\mathrm{d}z - f'\,\overline{f''}\,\mathrm{d}\bar z, \end{aligned}$$

was wir auch formulieren können: Die äußere Leistung der Zähigkeit ist

$$L_a = i\,\eta \oint (f'\,\mathrm{d}\overline{f'} - \overline{f'}\,\mathrm{d}f') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Man kann diese Formel noch umformen. Es sei:

$$\begin{aligned} f' &= v_x - i\,v_y = v\,e^{-i\vartheta}, \\ \mathrm{d}f' &= e^{-i\vartheta}(\mathrm{d}v - i\,v\,\mathrm{d}\vartheta), \\ f'\,\mathrm{d}\overline{f'} - \overline{f'}\,\mathrm{d}f' &= v\,(\mathrm{d}v + i\,v\,\mathrm{d}\vartheta) - v\,(\mathrm{d}v - i\,v\,\mathrm{d}\vartheta) = 2\,i\,v^2\,\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

und also

$$L_a = -2\,\eta \oint v^2\,\mathrm{d}\vartheta\ ^{2)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10\text{a}).$$

Das scheinbare Herausfallen der Zähigkeitswirkung in der Bernoullischen Gleichung findet hier ihr Gegenstück in dem Satz, daß bei Potentialbewegung

$$L_i = -L_a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

ist. Denn aus (5) folgt

$$\begin{aligned} L_a &= \oint (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z)\,\mathrm{d}F = \oint (X_x v_x + Y_x v_y + Z_x v_z)\cos(n,x) + \cdots \mathrm{d}F \\ &= \int \left\{\frac{\partial}{\partial x}(X_x v_x + Y_x v_y + Z_x v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y v_x + Y_y v_y + Z_y v_z) + \frac{\partial}{\partial z}(X_z v_x + Y_z v_y + Z_z v_z)\right\} \\ &= \int \left\{v_x\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + v_y\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) + v_z\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\right. \\ &\quad \left. + X_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + Y_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + Z_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + Y_y\,\frac{\partial v_y}{\partial y} + Y_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial z_z}{\partial y}\right) + Z_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\} \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

[2]) Lamb gibt S. 669 (1 bis 6) für den Raum die Formel $-\frac{\eta}{2}\oint \frac{\delta v^2}{\delta n}\,\mathrm{d}F$.

Die drei ersten Glieder verschwinden, da $\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=\eta\,\Delta v_x=0$ ist usw., und die weiteren Glieder geben $-L_i$. Die Sache ist nach den allgemeinen Prinzipien der Mechanik überdies klar. Ferner ist der Satz nichts anderes, als der in Komplexe umgeschriebene Greensche Satz: $\iint (\operatorname{grad}\varphi)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}s$.

3. Beispiele. Als Beispiele nehmen wir

1. Die Drehbewegung um einen Kreiszylinder. Im Unendlichen soll Ruhe herrschen. Dann ist

$$f(z)=\frac{C}{2\pi i}\log(x+i\,y),\quad C \text{ reell konstant},$$

die einzige Lösung; sie ist auch die einzige überhaupt, wenn wir alle Lösungen von Rotationssymmetrie heranziehen, nämlich

$$\psi=A\,r^2\ln r+B\,r^2+C\ln r+D,$$

von denen die beiden ersten Glieder wegen der Bedingung im Unendlichen fortfallen müssen. Es ist also

$$f'=\frac{C}{2\pi i}\frac{1}{x+i\,y};\qquad f''=-\frac{C}{2\pi i}\frac{1}{(x+i\,y)^2};$$

$$L_i=-4\,\eta\frac{C^2}{4\pi^2}\iint\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{r^4}=-\eta\frac{C^2}{\pi^2}2\pi\int_a^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^3}=-\eta\frac{C^2}{\pi}\frac{1}{a^2}.$$

Die Umfangsgeschwindigkeit ist $U=|f'|_{r=a}=\frac{C}{2\pi}\frac{1}{a}$, also

$$L_i=-4\,\pi\,\eta\,U^2.$$

Dagegen ist über einen Kreis integriert

$$L_a=-\eta\,4\pi v^2=-4\pi\eta\frac{C^2}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}=-\eta\frac{C^2}{\pi}\frac{1}{r^2}=-4\,\pi\,\eta\frac{U^2 a^2}{r^2}.$$

Dies verschwindet für $r\to\infty$, von außen wird also keine Leistung übertragen, dies geschieht allein von dem sich drehenden Zylinder, der die ganze verbrauchte Leistung $4\pi\eta\,U^2$ aufbringen muß.

2. Als zweites Beispiel nehmen wir den umströmten Kreiszylinder; die Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen sei jetzt U, sie erfolge in Richtung der x-Achse.
Dann ist bekanntlich die Potentialströmung gegeben durch

$$f=U(x+i\,y)+U\frac{a^2}{x+i\,y},\qquad f'=U-U\frac{a^2}{(x+i\,y)^2},\qquad f''=2\frac{U\,a^2}{(x+i\,y)^3}.$$

Also die innere Leistung

$$L_i=-16\,\eta\,U^2a^4\iint\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{r^6}=-32\,\pi\,\eta\,U^2a^4\int_a^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^5}=-8\,\pi\,\eta\,U^2.$$

Diese Leistung muß auch hier lediglich durch den Zylinder aufgebracht werden. Denn die äußere Leistung an einer Zylinderfläche ist

$$i\,\eta\oint(f'\,\mathrm{d}\bar f'-\bar f'\,\mathrm{d}f')=-2\,\eta\,J\int\left(U-U\frac{a^2}{r^2}e^{-2i\vartheta}\right)\mathrm{d}\left(U-U\frac{a^2}{r^2}e^{2i\vartheta}\right)$$

$$=-2\,\eta\,U^2\,J\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{a^2}{r^2}e^{-2i\vartheta}\right)\left(-2\,i\frac{a^2}{r^2}e^{2i\vartheta}\right)\mathrm{d}\vartheta$$

$$=-2\,\eta\cdot 2\,\frac{a^4}{r^4}2\pi\,U^2=-8\pi\,\eta\,U^2\frac{a^4}{r^4}.$$

Dieses gibt für $r\to\infty$ wieder null: die äußere Strömung gibt die Leistung nicht her, der Zylinder muß die ganze Leistung $8\pi\eta\,U^2$ liefern.

Dieser Zylinder kann natürlich nicht starr sein; er muß die Bewegung der Flüssigkeit mitmachen. Diese ist an seiner Oberfläche durch

$$(v_x - i\,v_y)_0 = f'_0 = U\,(1 - e^{-2i\vartheta}), \text{ also}$$

$$v_x = U\,(1 - \cos 2\,\vartheta), \qquad v_y = -\,U \sin 2\,\vartheta$$

gegeben. Man müßte also, um die Bewegung zu realisieren, der Haut des Zylinders eine Bewegung erteilen, wie sie Bild 1 andeutet und die entfernt an die Bewegung eines Schwimmers erinnert. Kehren wir die Bewegung um und lassen den Zylinder sich durch die Flüssigkeit, die jetzt im Unendlichen ruhen möge, mit der Geschwindigkeit U bewegen, dabei die angedeutete „Schwimmbewegung" ausführen, so müßte er, solange die laminare Bewegung stabil ist, einen Widerstand von der Größe $8\,\pi\,\eta\,U$ finden, da die Leistung $8\,\pi\,\eta\,U^2$ die obige bleibt. Größenordnungsgemäß stimmt sie mit einer Formel von Oseen und Lamb überein, die für den starren Zylinder den Widerstand

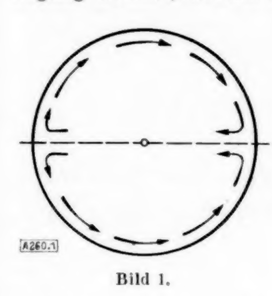


Bild 1.

$$\frac{8\,\pi\,\eta\,U}{1 - 2\log\dfrac{1{,}7811\ \mathrm{Re}}{8}}$$

angibt (Re die Reynoldssche Zahl). Beide Formeln würden identisch sein für $\Re_e = \dfrac{8}{1{,}7811}$, also etwas mehr als $\mathrm{Re} = 4$, während für die Gültigkeit der Formel $\mathrm{Re} \leq 1$ angegeben wird.

3. Als drittes Beispiel nehmen wir die Strömung um zwei gleiche parallele Kreiszylinder; im Unendlichen herrsche Ruhe. $2\,c$ sei die Entfernung der Mittelpunkte voneinander; R sei ihr Radius. Sie entstehen durch die konforme Abbildung

$$w = \frac{z - a}{z + a}$$

aus zwei konzentrischen Kreisen

$$|w| = \varrho_1 \text{ und } |w| = \varrho_2 = \frac{1}{\varrho_1}$$

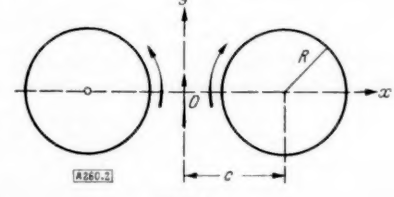


Bild 2.

der w-Ebene; man berechnet leicht $c = \lambda\,a$; $R = a\sqrt{\lambda^2 - 1}$; $\varrho^2 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$. Wir können $\lambda > 1$ annehmen: $\dfrac{1}{\varrho^2} = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$ entsteht aus ϱ^2 durch Vertauschen von λ mit $-\lambda$. $\dfrac{c}{R} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$, also $\lambda = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - R^2}}$. Das Strömungspotential ist gegeben durch

$$f = \frac{C}{2\pi i}\log w = \frac{C}{2\pi i}\log\frac{z - a}{z + a};$$

daher

$$v_x - i\,v_y = f' = \frac{C}{2\pi i}\left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z + a}\right).$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche der Zylinder.

Im Punkte O ist $z = 0$, also $v_x - i\,v_y = \dfrac{C}{2\pi i}\left(-\dfrac{2}{a}\right) = -\dfrac{C}{\pi\,i\,a}$, also $v_x = 0$. $v_y = -\dfrac{C}{\pi\,a}$. Wir setzen diesen Wert gleich U, so daß

$$C = -\,\pi\,a\,U = -\frac{c}{\lambda}\,U = -\,\pi\sqrt{c^2 - \lambda^2}\;U.$$

Die verbrauchte Leistung kann man nun entweder aus

$$L_i = -\,4\,\eta \iint f''\,\bar f''\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

oder aus

$$L_a = i\,\eta \oint (f'\,\mathrm{d}\bar f' - \bar f'\,\mathrm{d}f')$$

berechnen. Man erhält

$$f'' = -\frac{4\,a\,C}{2\pi i}\,\frac{z}{((z-a)(z+a))^2} = -\frac{C}{8\pi i a^2}\,\frac{(1-w^2)(1-w)^2}{w^2},$$

$$L_i = -4\eta\iint \frac{C^2}{64\pi^2 a^4}\,\frac{(1-w^2)(1-w)^2(1-\overline{w}^2)(1-\overline{w})^2}{w^2\,\overline{w}^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{4\eta}{-2i}\,\frac{C^2}{64\pi^2 a^4}\iint \frac{(1-w^2)(1-w)^2(1-\overline{w}^2)(1-\overline{w})^2}{w^2\,\overline{w}^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}$$

$$= -\frac{4\eta}{-2i}\,\frac{C^2\,4a^2}{64\pi^2 a^4}\iint \frac{(1-w^2)(1-\overline{w}^2)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\overline{w}}{w^2\,\overline{w}^2}$$

$$= -\eta\,\frac{C^2}{4\pi^2 a^2}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2 e^{2i\vartheta}-\varrho^2 e^{-2i\vartheta}+\varrho^4}{\varrho^4}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta \quad (w=\varrho\, e^{i\vartheta})$$

$$= -\eta\,\frac{C^2}{4\pi^2 a^2}\,2\pi\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\varrho_1^2\right) = -\frac{1}{2}\pi\eta U^2\,\frac{c\sqrt{c^2-R^2}}{R^2}.$$

L_a berechnet sich so:

$$L_a = i\eta\oint(f'\,\overline{f}''\,\mathrm{d}\overline{z} - \overline{f}'\,f''\,\mathrm{d}z)$$

über beide Zylinder erstreckt; oder

$$L_a = 2\eta\,\frac{C^2\,8\,a^2}{4\pi^2}\,2\,J\oint\frac{\overline{z}\,\mathrm{d}\overline{z}}{(z^2-a^2)(\overline{z}^2-a^2)^2}$$

über den rechten Zylinder erstreckt; die Verdoppelung ist durch den ersten Faktor 2 vorgenommen worden.

Nun heißt aber die Kreisgleichung $z\overline{z}-\lambda a(z+\overline{z})+a^2=0$. Eliminiert man damit z, so bekommt man

$$L_a = \frac{8\eta C^2}{\pi^2(\lambda^2-1)}\,J\oint\frac{\overline{z}\,\mathrm{d}\overline{z}\,(\overline{z}-\lambda a)^2}{(\overline{z}^2-a^2)^3} = -\frac{8\eta C^2}{\pi^2(\lambda^2-1)}\,J\oint\frac{z\,\mathrm{d}z\,(z-\lambda a)^2}{(z^2-a^2)^3}.$$

Dieses Integral berechnet man nach dem Residuensatz zu

$$-\frac{8\eta C^2}{\pi^2(\lambda^2-1)}\cdot\frac{\lambda}{8a^2}\,2\pi = -\frac{1}{2}\pi\eta U^2\,\frac{c\sqrt{c^2-R^2}}{R^2}.$$

Dieses ist die Leistung, welche die strömende Flüssigkeit an die Zylinder abgibt; daher das —-Zeichen.

4. **Als viertes Beispiel nehmen wir die Strömung um ein Joukowski-Kutta-Profil.** Es liege in der z-Ebene und werde auf den Kreis $|\zeta|=R$ in einer ζ-Ebene durch die bekannten Transformationen

$$\zeta = \frac{R}{a}(w-w_0); \qquad w = z+\sqrt{R^2-z^2}; \qquad w_0 = R - a\,e^{-\beta i}$$

konform abgebildet. O in der w-Ebene ist der Punkt $w=O$; $w=R$, d. h. $z=R$, $\zeta=R\,e^{-i\beta}$ entspricht der hinteren Spitze des Tragflügels; $w=-R$, d. h. $z=-R$ und

$$\zeta = -\frac{2R^2}{a} - R\,e^{-i\beta} = \zeta_1$$

dem durch Abrundung verdeckten vorderen Ende des Kreisbogens, dessen Bild ein den gezeichneten Kreis in $w=R$ berührender Kreis ist.

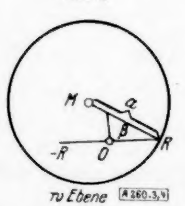


Bild 3 und 4.

Sind nun die Anströmkoordinaten U und V, so wäre für den Kreis der ζ-Ebene das Potential bekanntlich

$$f = \frac{C}{2\pi i}\log\frac{\zeta}{R} + (U-iV)\,\zeta + (U+iV)\,\frac{R^2}{\zeta}.$$

Da aber für große ζ resp. z der Grenzwert von $\frac{\zeta}{z}$ gleich $\frac{2R}{a}$ ist, muß man, wenn $U-iV$ die Anströmgeschwindigkeit in der z-Ebene bleiben soll, mit $\frac{a}{2R}$ multiplizieren. Somit erhält man für die z-Ebene die komplexe Geschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\frac{a}{2R}\left[\frac{C}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}+(U-iV)-(U+iV)\frac{R^2}{\zeta^2}\right]\frac{R}{a}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-R^2}}\right)$$

$$=\left[\frac{C}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}+(U-iV)-(U+iV)\frac{R^2}{\zeta^2}\right]\frac{w^2}{w^2-R^2}.$$

Bestimmt man nun in bekannter Weise C so, daß die Singularität am hinteren Ende $w=R$ fortfällt, d. h. setzt man

$$C=2\pi i R[(U+iV)e^{\beta i}-(U-iV)e^{-i\beta}],$$

so bekommt man nach leichter Rechnung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\frac{R}{a}\left[(U+iV)\frac{Re^{i\beta}}{\zeta^2}+(U-iV)\frac{1}{\zeta}\right]\frac{w^2}{w+R}$$

$$=\frac{R^2}{a^2}\left[(U+iV)\frac{Re^{i\beta}}{\zeta}+(U-iV)\frac{1}{\zeta}\right]\frac{w^2}{\zeta-\zeta_1}.$$

Bemerkenswert ist, daß dies eine rationale Funktion von ζ ist, deren Nenner $\zeta^2(\zeta-\zeta_1)$ ist, deren Zähler ebenfalls dritten Grades ist, so daß $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ die Partialbruchzerlegung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=A+\frac{B}{\zeta}+\frac{C}{\zeta^2}+\frac{D}{\zeta-\zeta_1}$$

hat. A brauchen wir nicht, es berechnen sich

$$C=-\frac{1}{\zeta_1}\frac{R^2}{a^2}w_0^2(U+iV)Re^{i\beta},$$

$$D=\frac{1}{\zeta_1^2}\frac{R^4}{a^2}[(U+iV)Re^{i\beta}+(U-iV)\zeta_1],$$

$$B+D=R(U+iV)e^{i\beta}-R(U-iV)e^{-i\beta}.$$

Nun kann man die Formel für die äußere Leistung leicht komplex transformieren. Es ist

$$L_a=i\eta\oint(f'\,\mathrm{d}\bar f'-\bar f'\,\mathrm{d}f')=2\eta J\oint\bar f'\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=2\eta J\oint\bar f'\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

Wir können also das Integral in der ζ-Ebene über den Kreis $|\zeta|=R$ erstrecken, wo dann $\bar\zeta=\frac{R^2}{\zeta}$ ist. f' ist unverändert das obige $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$, also

$$\frac{\mathrm{d}\bar f}{\mathrm{d}\bar z}=\bar A+\frac{\bar B}{\bar\zeta}+\frac{\bar C}{\bar\zeta^2}+\frac{\bar D}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}$$

oder auf dem Kreis $|\zeta|=R$

$$\bar f'=\bar A+\frac{\bar B}{R^2}\zeta+\frac{\bar C}{R^4}\zeta^2+\frac{\bar D\zeta}{R^2-\zeta\bar\zeta_1}.$$

Der Pol von $\bar f'$, nämlich $\zeta=\frac{R^2}{\bar\zeta_1}$ liegt außerhalb.

Mithin gibt der Residuensatz

$$\oint\bar f'\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=2\pi i\left[-\frac{B\bar B}{R^2}-2\frac{C\bar C}{R^4}-\frac{B\bar D}{R^2}-\frac{D\bar B}{R^2}-2\frac{C\bar D}{R^4}\bar\zeta_1-2\frac{\bar C D}{R^4}\zeta_1-\frac{D\bar D R^2}{(R^2-\zeta_1\bar\zeta_1)^2}\right]$$

$$=-2\pi i\left[\frac{B+D}{R}\cdot\frac{\bar B+\bar D}{R}+2\frac{C+D\zeta_1}{R^2}\cdot\frac{\bar C+\bar D\bar\zeta_1}{R^2}+\frac{D\bar D}{R^4}\cdot\frac{(3R^2-2\zeta_1\bar\zeta_1)\zeta_1^2\bar\zeta_1^2}{(R^2-\zeta_1\bar\zeta_1)^2}\right].$$

Also ist L_a das $-4\pi\eta$-fache der vorstehenden eckigen Klammer.

Wir wollen nun den echten Bruch $\frac{R}{a}=\varepsilon$ setzen. Dann ist der Nenner

$$R^2-\zeta_1\bar\zeta_1=R^2-\left(2\frac{R^2}{a}+Re^{-\beta i}\right)\left(2\frac{R^2}{a}+Re^{\beta i}\right)=4R^2\varepsilon(\cos\beta-\varepsilon).$$

Die positive Größe $\cos\beta - \varepsilon = \frac{1}{a}(a\cos\beta - R)$ hat ersichtlich eine besondere Bedeutung für den Tragflügel; sie ist ein Maß für die Abrundung.

Eine längere, aber elementare Rechnung ergibt nun die Endformel:

$$L_a = -4\pi\eta\left\{4(U\sin\beta + V\cos\beta)^2 + U^2(1+\varepsilon^2)^2 + V^2(1-\varepsilon^2)^2\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\varepsilon^2[(U\cos\beta - V\sin\beta - 2\varepsilon U)^2 + \varepsilon^2 V^2]\cdot\frac{1-8\varepsilon^2+8\varepsilon\cos\beta}{(\cos\beta-\varepsilon)^2}\right\}.$$

Da die Abrundung in der Regel gering sein wird, ist $\cos\beta - \varepsilon$ klein, also das letzte Glied das größte. Behält man es allein bei und setzt man im Zähler überall $\varepsilon = \cos\beta$, so bekommt man als Näherungsformel für wenig abgerundete Tragflügel

$$L_a = -\pi\eta\cos^2\beta\frac{(U\cos\beta + V\sin\beta)^2 + \cos^2\beta\, V^2}{(\cos\beta-\varepsilon)^2}.$$

Führt man noch den Anstellwinkel α durch $U = v\cos\alpha$, $V = v\sin\alpha$ ein, so bekommt man

$$L_a = -\pi\eta v^2\cos^2\beta\frac{\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2\beta\sin^2\alpha}{(\cos\beta-\varepsilon)^2}$$

und also einen Widerstand

$$W = \pi\eta v\cos^2\beta\frac{\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2\beta\sin^2\alpha}{(\cos\beta-\varepsilon)^2}.$$

Es ist offensichtlich nur das Glied berücksichtigt, das von dem scharfen Umbiegen um die Vorderkante herrührt. Ein Widerstand, der von Wirbelablösung herrührt, steckt natürlich nicht in der Formel; daher ist ein Vergleich mit der Erfahrung kaum möglich, zumal diese Oberflächenbewegung wohl noch schwerer zu realisieren ist, als die beim Kreiszylinder in Beispiel (2). Vielleicht daß das Ergebnis in Analogie mit diesem zweiten Beispiel eine gewisse Abschätzung des Widerstandes bei laminarer Bewegung bedeutet.

Teil II. Zylinder mit konstanter Winkelgeschwindigkeit an der Oberfläche.

1. Der Ansatz. Es hat vielleicht Interesse, nach solchen Profilen zu fragen, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden. Man könnte solche Bewegungen technisch leichter ausführen.

Diese Aufgabe läßt sich auf ein Randwertproblem zurückführen, das von der vierten Ordnung ist. Eine Lösung ist bekannt: der Kreiszylinder, unser erstes Beispiel. Es scheint aber, daß es weitere Lösungen nicht gibt, jedenfalls gibt es in gewissem Sinne keine stetig benachbarten Lösungen zum Kreiszylinder. Vielleicht gibt es Lösungen, die aus mehreren Zylindern bestehen, also ein mehrfach zusammenhängendes Strömungsgebiet ergeben. Darüber aber kann ich nichts sagen.

Wir wollen das Problem für einen Zylinder ansetzen. Es soll also sein

$$z = x + iy = re^{i\vartheta} \text{ mit } \vartheta = \omega t,\ \omega \text{ konstant} \qquad (1).$$

Mithin

$$v_x + iv_y = \dot{x} + i\dot{y} = \left(\frac{dr}{d\vartheta} + ir\right)e^{i\vartheta}\omega,$$

folglich

$$f'(z) = v_x - iv_y = \left(\frac{dr}{d\vartheta} - ir\right)e^{-i\vartheta}\omega \qquad (2).$$

Bilden wir nun das Äußere des gesuchten Zylinders auf das Äußere des Kreises $|w| = \varrho$ einer w-Ebene durch

$$z = F(w)$$

konform ab, so entsteht dort die durch

$$f = \frac{C}{2\pi i}\log w$$

gegebene Strömung. Es ist also

$$f'(z) = \frac{C}{2\pi i}\frac{1}{w}\frac{dw}{dz} = \frac{C}{2\pi i}\frac{1}{w}\frac{1}{F'(w)}.$$

Auf dem gesuchten Rand, d. h. für $w = \varrho e^{i\alpha}$ soll das nach (2) gleich

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\vartheta} - i\,r\right) e^{-i\vartheta}\, w = \frac{\mathrm{d}\,\bar z}{\mathrm{d}\,\vartheta}\,\omega$$

sein. Also ist

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar z}{\mathrm{d}\,\vartheta}\,\omega = \frac{C}{2\pi i}\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,z}$$

oder
$$\frac{\mathrm{d}\,\bar z}{\mathrm{d}\,\bar w}\frac{\mathrm{d}\,\bar w}{\mathrm{d}\,\vartheta} = \frac{C}{2\pi i\,\omega}\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,z}$$

oder
$$\left|\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,w}\right|^2\frac{\mathrm{d}\,\bar w}{\mathrm{d}\,\vartheta} = \frac{C}{2\pi i\,\omega}\frac{1}{w}.$$

Dies gilt für $w = \varrho\, e^{i\alpha}$, $\bar w = \varrho\, e^{-i\alpha}$, $\mathrm{d}\,\bar w = -\,i\,\varrho\, e^{-i\alpha}\,\mathrm{d}\,\alpha$. Also folgt

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,w}\right|^2\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,\vartheta} = \frac{C}{2\pi\,\varrho^2\,\omega} \quad \text{(3).}$$

Nun ist aber nach (1)

$$r\,e^{i\vartheta} = z = F(w),$$
$$r\,e^{-i\vartheta} = \bar z = \overline{F(w)},$$

also $e^{2i\vartheta} = \dfrac{F(w)}{\overline{F(w)}}$. Daraus

$$2\,i\,\frac{\mathrm{d}\,\vartheta}{\mathrm{d}\,\alpha} = \frac{F'(w)}{F(w)}\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,\alpha} - \frac{\overline{F'(w)}}{\overline{F(w)}}\frac{\mathrm{d}\,\bar w}{\mathrm{d}\,\alpha}$$
$$= \frac{F'(w)}{F(w)}\,i\,w + \frac{\overline{F'(w)}}{\overline{F(w)}}\,i\,\bar w = 2\,i\,\Re\,\frac{F'(w)}{F(w)}\,w.$$

Setzen wir dies in (3) ein, so bekommen wir die Formulierung der Randwertaufgabe. Es soll für $|w| > \varrho$ eine analytische Funktion

$$z = F(w) = \sum_{-1}^{\infty} a_\nu\, w^{-\nu} \quad \text{(4)}$$

gesucht werden, die auf $|w| = \varrho$ die Randbedingung

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,w}\right|^2 = \varkappa\,\Re\left(\frac{w}{z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,w}\right) \quad \text{mit} \quad \varkappa = \frac{C}{2\pi\,\varrho^2\,\omega} \quad \text{(5)}$$

erfüllt. Man kann dieser Bedingung leicht die Form geben

$$\varkappa\,\varrho^2\,\frac{\mathrm{d}\,\alpha\,\mathrm{d}\,\tau}{r^2} = \mathrm{d}\,s^2,$$

wo $\mathrm{d}\,\tau$ das überstrichene Flächenelement $r^2\,\mathrm{d}\,\vartheta$ in der z-Ebene, $\mathrm{d}\,s$ das Bogenelement ist.

2. Durchführung. Wir sehen zunächst, was wir mit dem Ansatz (4) erreichen können. Wir formen die linke Seite der Randbedingung (5) um. Aus

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,w} = -\sum_{-1}^{\infty} \nu\, a_\nu\, w^{-\nu-1}$$

folgt

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,w}\right|^2 = \left[\sum_{-1}^{\infty} \nu\, a_\nu\, w^{-\nu-1}\right]\left[\sum_{-1}^{\infty} \mu\, \bar a_\mu\, \bar w^{-\mu-1}\right],$$

wofür wir auch $\sum_0^\infty b_\nu\, w^{-\nu} \sum_0^\infty \bar b_\nu\, \bar w^{-\nu}$ schreiben mit $b_\nu = -\,(\nu - 1)\, a_{\nu-1}$. Das aber ist wegen $\bar w = \dfrac{\varrho^2}{w}$ gleich

$$\sum_0^\infty b_\nu\, w^{-\nu} \sum_0^\infty \bar b_\mu\, \frac{w^\mu}{\varrho^{2\mu}} = \sum w^{\mu-\nu} \sum \varrho^{-2\mu}\, b_\nu\, \bar b_\mu = \sum_{-\infty}^{\infty} w^n \sum_{\nu=0} \varrho^{-2\nu-2n}\, b_\nu\, \bar b_{n+\nu}.$$

(b mit negativem Index sind null zu setzen)

$$= \sum_0^\infty w^n \sum_{\nu=0}^\infty \varrho^{-2\nu-2n} b_\nu \bar{b}_{n+\nu} + \sum_1^\infty w^{-n} \sum_{\nu=n}^\infty \varrho^{-2\nu+2n} b_\nu \bar{b}_{\nu-n}$$

$$= \sum_0^\infty w^n \sum_{\nu=0}^\infty \varrho^{-2\nu-2n} b_\nu \bar{b}_{n+\nu} + \sum_1^\infty w^{-n} \sum_0^\infty \varrho^{-n} b_{\nu+n} \bar{b}_\nu .$$

Da der Ausdruck reell ist, können wir ein $\Re$ davorschreiben und dann unter dem $\Re$ Zeichen in der ersten Summe zum konjugierten Wert übergehen. Setzen wir dann noch $\bar{w}^n = \frac{\varrho^{2n}}{w^n}$, so erhalten wir

$$\left|\frac{dz}{dw}\right|^2 = \Re\left\{\sum_0^\infty w^{-n} \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} \bar{b}_\nu b_{n+\nu} + \sum_1^\infty w^{-n} \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n} \bar{b}_\nu\right\}$$

$$= \Re\left\{\sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_\nu \bar{b}_\nu + 2\sum_1^\infty w^{-n} \sum \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n} \bar{b}_\nu\right\}.$$

Mithin hat die Randbedingung die Form angenommen:

$$\Re\left\{\sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_\nu \bar{b}_\nu + 2\sum_1^\infty w^{-n} \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n} \bar{b}_\nu - \varkappa \frac{w}{z}\frac{dz}{dw}\right\} = 0 .$$

In der geschweiften Klammer steht eine Funktion, die im Außenraum $|w| > \varrho$ regulär ist, denn z darf dort nirgendwo null sein. Also muß der reelle Teil dieser Funktion dort überall null sein, die Funktion selbst also konstant imaginär:

$$\varkappa \frac{w}{z}\frac{dz}{dw} = \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_\nu \bar{b}_\nu + 2\sum_1^\infty w^{-n} \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n} \bar{b}_\nu + D\,i .$$

Daraus folgt durch Integration

$$\log z = \log A + \frac{1}{\varkappa}\left(\sum \varrho^{-2\nu} b_\nu \bar{b}_\nu + D\,i\right)\log w + \frac{2}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{w^{-n}}{n} \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n} \bar{b}_\nu$$

(A Integrationskonstante) und daraus

$$z = A\, w^\gamma\, e^{-\frac{2}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{w^{-n}}{n}\sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n}\bar{b}_\nu},$$

wo

$$\gamma = \frac{1}{\varkappa}\left(\sum \varrho^{-2\nu} b_\nu \bar{b}_\nu + D\,i\right).$$

Damit nun z die Form ... (4) hat, muß

$$D = 0 \qquad (6)$$

und

$$\sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_\nu \bar{b}_\nu = \varkappa \qquad (7)$$

sein. Hieraus folgt $|b_\nu|^2 \leq \varkappa \varrho^{2\nu}$ und somit die Konvergenz der Reihe ... (4) für $|w| > \varrho$, falls sich nur die b_ν resp. a_ν bestimmen lassen.

Solche Bestimmungsgleichungen bekommen wir nun aus dem Vergleich der beiden Entwicklungen für z

$$A\, w\, e^{-\frac{2}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{w^{-n}}{n}\sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+n}\bar{b}_\nu} = \sum_{-1}^\infty a_\nu w^{-\nu} = b_0 w - \sum_1^\infty \frac{b_{\nu+1}}{\nu} w^{-\nu} + a_0 \qquad (8).$$

Sofort folgt:

$$A = b_0 = a_{-1} \qquad (9),$$

weiter

$$-\frac{2}{\varkappa} A \sum_0^\infty \varrho^{-2\nu} b_{\nu+1} \bar{b}_\nu = a_0 .$$

Die weiteren Gleichungen sind komplizierter: es sind ∞ viele nichtlineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten b_ν und es sind keine Rekursionsformeln. Es scheint nicht aussichtsvoll, sie lösen zu wollen.

3. Nachbarlösungen zum Kreiszylinder. Obwohl man die Näherungsidee auch direkt anwenden kann, schlagen wir einen anderen Weg ein. Es muß

$$z = C_0\, w$$

eine Lösung sein. Durch direktes Einsetzen in ... (5) bekommen wir

$$C_0 \overline{C}_0 = \varkappa \Re \frac{1}{\overline{C}_0} C_0 = \varkappa = \frac{C}{2 \pi \varrho^2 \omega}.$$

Wir fragen nun nach **Nachbarlösungen**, d. h. wir setzen

$$z = C_0 \sum_0^\infty \varepsilon^n g_n(w)$$

mit einem hinreichend kleinen ε und $g_0 = w$.

Setzen wir das in die Randbedingung (5) ein, die wir jetzt besser

$$\left| z \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} w} \right|^2 = \varkappa \Re \left(w \overline{z} \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} w} \right)$$

schreiben, so bekommen wir

$$\sum \varepsilon^n g_n(w) \sum \varepsilon^n \overline{g_n(w)} \sum \varepsilon^n g'_n(w) \sum \varepsilon^n \overline{g'_n(w)} = \Re \left(\sum \varepsilon^n \overline{g_n(w)} \sum \varepsilon^n w g'_n(w) \right).$$

Das $\varkappa = C_0 \overline{C}_0$ hat sich beiderseits fortgehoben.

Eine einfache Rechnung liefern nun die Rekursionsdifferentialgleichungen zunächst für den Rand

$$\Re \left(g'_n \varrho^2 + \frac{\varrho^2}{w} g_n \right) = - \sum_{\nu + \mu = n} [\varrho^2 g'_\nu \overline{g'_\mu} + g_\nu \overline{g}_\mu + \Re (2 \overline{w} g'_\nu g_\mu + w \overline{g}_\nu g'_\mu)]$$

$$- 2 \sum_{\nu + \mu + \sigma = n} \Re [g'_\nu g_\mu \overline{g}_\sigma + \overline{w} g_\nu g'_\mu \overline{g}'_\sigma] - \sum_{\nu + \mu + \sigma + \tau = n} g_\nu \overline{g}_\mu g'_\sigma \overline{g}''_\tau \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Rechts laufen die Indizes nur von 1 ab. Daß $g_0 = w$ ist, ist schon benutzt.

Nach der Methode der vorhergehenden Betrachtung kann man nun auch die beiden ersten Glieder und damit die ganze rechte Seite in die Form $\Re G(w)$ bringen, wo $G(w)$ nach fallenden Potenzen von w geordnet ist.

Man kann dann weiter beiderseits nach der Schlußweise der vorigen Nummer das $\Re$ fortlassen und erhält dann wegen $D = 0$ (Formel 6) Differentialgleichungen der Form

$$g'_n + \frac{1}{w} g_n = \sum_0^\infty C_{n,\nu} w^{-\nu}$$

mit bekannten $C_{n,\nu}$. Diese läßt sich integrieren zu

$$g_n = \frac{B_n}{w} + \frac{1}{2} C_{n,0} w + C_{n,1} + C_{n,2} \frac{\log w}{w} + \sum_3^\infty \frac{C_{n,\nu}}{-\nu + 2} w^{-\nu+1}.$$

B_n ist eine neue Integrationskonstante.

Da das Glied mit $\log w$ unzulässig ist, müssen die Integrationskonstanten so eingerichtet werden, daß alle $C_{n,2} = 0$ sind. Die ersten Glieder berechnen sich leicht. Unter Beachtung von $D = 0$ bekommt man

$$g_1 = \frac{B_1}{w}; \qquad g_2 = -\frac{1}{2} \frac{B_1 \overline{B}_1}{2} w + \frac{B_2}{w} - \frac{B_1^2}{w^3};$$

$$g_3 = -\frac{B_1 \overline{B}_2}{\varrho^4} w - 2 \frac{B_1^3 B_2}{w^3} + 2 \frac{B_1^3}{w^5} + \frac{B_3}{w} + 4 \frac{\overline{B}_1 B_1^2}{\varrho^4} \frac{\log w}{w}.$$

Da ein Glied mit $\log w$ unzulässig ist, muß

$$B_1 = 0$$

sein. Damit aber fiele das ganze erste Korrekturglied $\varepsilon g_1(w)$ fort, und wenn man nun das ε als den Kleinheitsfaktor des ersten wirklich vorhandenen Gliedes definiert, entsteht ein Widerspruch.

Es gibt also keine Nachbarlösungen der Form

$$z = C_0 \sum_0^\infty \varepsilon^n g_n(w)$$

mit $g_0(w) = w$, $g_1(w) \not\equiv 0$. Es bleibt dahingestellt, ob es Entwicklungen nach gebrochenen Potenzen geben kann. 260

Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen.

Von *W. Tollmien* in Dresden.

Durch Beispiele stationärer ebener adiabatischer Potentialströmungen war das Auftreten von „Grenzlinien" bekannt, die eine Schar Machscher Wellen einhüllen. Unter Zuhilfenahme der Molenbroek-Tschapliginschen Transformation werden nunmehr allgemein die Singularitäten von Gasströmungen an solchen Grenzlinien erörtert. Es wird bewiesen, daß eine Strömung in keiner Weise über die Grenzlinie hinaus fortgesetzt werden kann. Daher muß die berechnete adiabatische Potentialströmung schon stromaufwärts vor der Grenzlinie zusammenbrechen.

Bei der Betrachtung stationärer ebener Strömungen eines kompressiblen Gases kann man oft Wirbelfreiheit voraussetzen, falls sich das Gas durchweg adiabatisch verhält. Freilich ändert die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential in Abhängigkeit von den cartesischen Ortskoordinaten ihre Art, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten in manchen Gebieten die Schallgeschwindigkeit überschreiten. Doch bedingt dieser Übergang von einer elliptischen zu einer hyperbolischen Differentialgleichung zunächst nur ein verschiedenes Verhalten der Strömung bei der Fortsetzung kleiner Störungen, wie sie etwa von begrenzenden Wänden ausgehen. Im großen und ganzen beeinflußt aber der Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit die Strömung noch wenig, wie man etwa aus Druckmessungen erkennen kann. Dagegen legen viele Beobachtungen den Verdacht nahe, daß eine starke Änderung des Verhaltens der Strömung eintreten kann, sobald die Schallgeschwindigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit erst einmal um ein gewisses Maß überschritten wird. Die in solchen Fällen mehrfach beobachtete schroffe Änderung der Druckverteilung z. B. an Tragflügelprofilen möchte zu dem Schluß verführen, daß die Strömung überhaupt nicht mehr wirbelfrei und adiabatisch bleibt. Darauf hat besonders G. I. Taylor[1]) hingewiesen. Auf welches Vorkommnis ist nun der Umsturz der Potentialbewegung zurückzuführen, nachdem der Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit an sich aus theoretischen und experimentellen Gründen als Ursache ausscheidet? Das ist die Frage.

Nun war ich bei der Konstruktion adiabatischer Potentialströmungen mit einem Übergang aus dem Unterschall- in das Überschallgebiet[2]) im Jahre 1937 zum ersten Male auf eine Erscheinung gestoßen, die das Weiterbestehen einer Potentialströmung zum mindesten sehr fraglich machte. In diesen ebenen Strömungen durch gekrümmte Kanäle traten sehr häufig nach Überschreiten der Schallgeschwindigkeit Linien auf, an welchen die Strömungen verschiedene singuläre Eigenschaften hatten. Diese Linien hatte ich bis zur weiteren Klärung des Sachverhaltes vorläufig Grenzlinien genannt, da mir durch sie den adiabatischen Potentialströmungen eine natürliche Grenze gesetzt zu sein schien. Das Druckgefälle an den Grenzlinien wird unendlich, die Stromlinien haben dort Spitzen. Für besonders wichtig hielt ich die Eigenschaft, daß die Grenzlinie nicht nur eine Machsche Welle[3]), sondern auch eine Enveloppe Machscher Wellen ist.

Es ist aber keineswegs so, daß nach Überschreiten der Schallgeschwindigkeit unbedingt eine Grenzlinie auftritt. Dies sieht man am Beispiel des Potentialwirbels mit konzentrischen, kreisförmigen Stromlinien und derselben Geschwindigkeitsverteilung, wie sie in den Anfängen der Hydrodynamik ohne Berücksichtigung der Kompressibilität gelehrt wird. Um ein kreisringförmiges Gebiet mit Überschallgeschwindigkeit ist also das Unterschallgebiet gelagert. Auch in meiner angeführten Arbeit findet sich eine Strömung mit Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten, ohne daß eine Grenzlinie auftritt (a. a. O. S. 129).

F. Ringleb[4]) hat nun im Jahre 1940 neue Strömungen mit Grenzlinien gefunden. Er nannte diese Linien Stoßlinien, was leicht zu Verwechslungen mit den ganz andersartigen Verdichtungsstößen führen kann. Zur Berechnung seiner Strömungen benutzte F. Ringleb

[1]) G. I. Taylor: Recent work on the flow of compressible fluids. J. London Mathem. Soc. Bd. 5 (1930), S. 224 bis 240. Deutsche Übersetzung in Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930), S. 334 bis 345. Vgl. auch den Vortrag von G. I. Taylor: Well established problems in high speed flow. Reale Accad. d'Italia, Fondazione Allesandro Volta, Atti dei Convegni 5, 30. Sett. — 6. Ott. 1935. Tema: Le alte velocità in aviazione S. 198 bis 214, Roma 1936.

[2]) W. Tollmien: Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 117 bis 136.

[3]) Daß die Grenzlinie eine Machsche Welle ist, hatte schon W. G. Bickley an einem von Taylor herrührenden Beispiel einer aufhörenden adiabatischen Potentialströmung bemerkt, vgl. Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930), S. 342.

[4]) F. Ringleb: Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 185 bis 198.

die Molenbroek-Tschapliginsche Transformation[5]) der gasdynamischen Differentialgleichungen. Kurz gesagt, wird danach die Stromfunktion ψ nicht als Funktion cartesischer Ortskoordinaten x, y, sondern als Funktion polarer Geschwindigkeitskoordinaten betrachtet, als welche Geschwindigkeitsbetrag q und Richtungswinkel ϑ der Strömung gegen die x-Achse genommen werden. Die herauskommende lineare Differentialgleichung ist für die Herstellung von Beipielen besonders bequem. F. Ringleb fand bei seinen Strömungen die singulären Eigenschaften meiner Grenzlinien — bis auf die letzte[6]) — wieder. In einer anschließenden Arbeit[7]) hat F. Ringleb nun die Anfänge einer allgemeinen Theorie der Grenzlinien entwickelt, wobei ihm wiederum die Molenbroek-Tschapliginsche Transformation sehr zustatten kam. Die Auseinandersetzung mit diesen einschlägigen Untersuchungen F. Ringleb's wird in den Abschnitten 4 und 5 der vorliegenden Abhandlung ihren Platz finden, wo das Verhalten der Stromlinien, des Druckgefälles und der Machschen Wellen an der Grenzlinie erörtert wird.

Die erste Veranlassung zu meiner gegenwärtigen Untersuchung gab die Bemerkung, daß die Gleichung der Grenzlinie unmittelbar aus der Molenbroek-Tschapliginschen Transformation folgt. Die Gleichung der Grenzlinie bedeutet nämlich nichts anderes als das Verschwinden einer Funktionaldeterminante, welche für die eineindeutige Abbildung eines x-y-Bereiches oder Ortsplanes auf einen q-ϑ-Bereich oder Geschwindigkeitsplan entscheidend ist. Gelegentlich der Untersuchung des Zusammenhanges von Orts- und Geschwindigkeitsplan wurden dann diejenigen Strömungen festgestellt, welche bei Anwendung der Molenbroek-Tschapliginschen Transformation der Betrachtung verlorengehen. Ferner sollte der Beweis geführt werden, daß die Grenzlinie allgemein Enveloppe einer Schar Machscher Wellen ist. Dieser Beweis war in der Ringlebschen Arbeit trotz eines dahingehenden Anspruches tatsächlich nicht erbracht. Schließlich und vor allem wird bewiesen werden, daß irgendeine stationäre ebene Fortsetzuug der Strömung über eine Grenzlinie hinaus nicht möglich ist. Aus dieser Nichtfortsetzbarkeit folgt, daß die errechnete Potentialströmung sich bis zur Grenzlinie hin nicht verwirklichen läßt. Das theoretische Auftreten von Grenzlinien bedeutet deshalb einen Zusammenbruch der berechneten adiabatischen Potentialströmung schon stromaufwärts vor der Grenzlinie.

1. Die Molenbroek-Tschapliginsche Transformation.

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir im folgenden nur dimensionslose Geschwindigkeiten, die auf die größtmögliche Geschwindigkeit V_m bezogen sind, welche beim Ausströmen ins Vakuum eintritt und gleich $\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\cdot\frac{p_0}{\varrho_0}}$ ist, wo p_0 der Kesseldruck, ϱ_0 die Kesseldichte und $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Mit u bezeichnen wir die dimensionslose Geschwindigkeitskomponente in der x-Richtung, mit v die in der dazu senkrechten y-Richtung, mit q den Geschwindigkeitsbetrag, mit ϑ den Winkel der Geschwindigkeit gegen die x-Richtung. Die Dichte denken wir uns durch Bezug auf die Kesseldichte dimensionslos gemacht.

Dann gilt für die dimensionslose Dichte:

$$\varrho=(1-q^2)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Die Schallgeschwindigkeit a ist bestimmt durch:

$$a^2=\frac{\varkappa-1}{2}(1-q^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Wir merken gleich als Folgerung an:

$$\frac{d\varrho}{dq}=-\varrho\frac{q}{a^2}, \qquad \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dq}=\frac{1}{\varrho}\frac{q}{a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

---

[5]) P. Molenbroek: Über einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Arch. Math. Phys. 1890, 2. Reihe, 9. Teil, S. 157 bis 195. A. Tschapligin: Über Gasstrahlen, Wissenschaftl. Ann. d. Univ. Moskau, Phys. Math. Kl. Bd. 21 (1904), S. 1 bis 121 (russisch) wieder abgedruckt in der vollständigen Ausgabe seiner Werke. Über die Tschapliginschen Untersuchungen findet sich ein Bericht in der Abhandlung von B. Demtchenko: Sur la relation entre la dynamique des fluides compressibles et celle des fluides incompressibles. Public. Math. de l'Univers. de Belgrade Bd. 2 (1933), S. 85 bis 105.

[6]) Vgl. meine Zuschrift an den Herausgeber in Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 295 bis 296.

[7]) F. Ringleb: Über die Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß. Deutsche Mathematik Bd. 5 (1940), S. 377 bis 384.

Die beiden Grundgleichungen der stationären ebenen Potentialströmung sind die Gleichung der Wirbelfreiheit:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

Unter Einführung eines Potentials φ und einer Stromfunktion ψ kann man zur Befriedigung der beiden Grundgleichungen setzen:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \ldots \quad (6a),$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots \quad (6b).$$

Aus diesen beiden Differentialgleichungen folgt mit Benutzung von (3) die Differentialgleichung für ψ allein:

$$\psi_{xx}(a^2 - u^2) - 2\psi_{xy}\, u\, v + \psi_{yy}(a^2 - v^2) = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

Diese Gleichung wollen wir fortan schlechthin als „Strömungsgleichung" bezeichnen. Beiläufig sei auch die Differentialgleichung für das Potential φ angeführt:

$$\varphi_{xx}(a^2 - u^2) - 2\varphi_{xy}\, u\, v + \varphi_{yy}(a^2 - v^2) = 0 \quad \ldots \quad (8).$$

Die charakteristischen Grundkurven beider Differentialgleichungen genügen der Beziehung

$$(a^2 - u^2)\,\mathrm{d}y^2 + 2\,u\,v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (a^2 - v^2)\,\mathrm{d}x^2 = 0$$

oder

$$a^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) = (u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x)^2 \quad \ldots \quad (9).$$

Diese charakteristischen Grundkurven sind im Überschallgebiet $q > a$ reell; es sind die beiden Scharen Machscher Wellen, welche mit den Stromlinien den Machschen Winkel $\alpha = \arcsin\frac{a}{q}$ bilden.

Potential- und Stromfunktion sind nach (6) definiert durch:

$$\mathrm{d}\varphi = u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y \quad \ldots \quad (10a),$$

$$\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\psi = u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x \quad \ldots \quad (10b)$$

Nach der Idee der Hodographenmethode sollen φ und ψ nicht mehr als Funktionen der cartesischen Ortskoordinaten x, y, sondern der polaren Geschwindigkeitskoordinaten q, ϑ aufgefaßt werden. Um die Beziehung zwischen den alten unabhängigen Veränderlichen x, y und den neuen q, ϑ aufzustellen, löst man das System (10) nach $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ auf:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{q^2}\left(u\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{\varrho}v\,\mathrm{d}\psi\right) \quad \ldots \quad (11a),$$

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{q^2}\left(v\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{\varrho}u\,\mathrm{d}\psi\right) \quad \ldots \quad (11b).$$

Indem φ und ψ jetzt als Funktionen von q und ϑ aufgefaßt werden, bekommt man unter Berücksichtigung von $u = q\cos\vartheta$, $v = q\sin\vartheta$:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{q}\left\{\left(\cos\vartheta\,\varphi_q - \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\,\psi_q\right)\mathrm{d}q + \left(\cos\vartheta\,\varphi_\vartheta - \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\,\psi_\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta\right\} \quad \ldots \quad (12a),$$

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{q}\left\{\left(\sin\vartheta\,\varphi_q + \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\,\psi_q\right)\mathrm{d}q + \left(\sin\vartheta\,\varphi_\vartheta + \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\,\psi_\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta\right\} \quad \ldots \quad (12b).$$

Da x und y durch diese Beziehungen definiert sind, müssen nach dem Hauptsatz über Kurvenintegrale die Integrabilitätsbedingungen gelten:

$$\varphi_\vartheta = \frac{1}{\varrho}q\,\psi_q \quad \ldots \quad (13a),$$

$$\varphi_q = -\frac{1}{\varrho\,q}\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\psi_\vartheta \quad \ldots \quad (13b).$$

Dies Differentialgleichungssystem entspricht dem Cauchy-Riemannschen bei inkompressiblen Strömungen ($a \to \infty$), wobei man sich zu erinnern hat, daß dann $\ln q$ und ϑ isometrische Koordinaten sind. Die beiden Differentialgleichungssysteme (12) und (13) bilden die Grundlage der Hodographenmethode der Gasdynamik.

Die Beziehungen (12) zwischen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten formen wir für unsere Anwendungen mit Hilfe von (13) so um, daß φ nicht mehr auftritt:

$$\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\varrho q}\left\{-\left[\cos\vartheta\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{q}\,\psi_\vartheta + \sin\vartheta\,\psi_q\right]\mathrm{d}\,q + \left[\cos\vartheta\,q\,\psi_q - \sin\vartheta\,\psi_\vartheta\right]\mathrm{d}\,\vartheta\right\} \quad . \quad (14\,\mathrm{a}),$$

$$\mathrm{d}\,y = \frac{1}{\varrho q}\left\{\left[-\sin\vartheta\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{q}\,\psi_\vartheta + \cos\vartheta\,\psi_q\right]\mathrm{d}\,q + \left[\sin\vartheta\,q\,\psi_q + \cos\vartheta\,\psi_\vartheta\right]\mathrm{d}\,\vartheta\right\} . \quad . \quad (14\,\mathrm{b}).$$

Aus dem Differentialgleichungssystem (13) kann man eine Differentialgleichung für ψ allein finden:

$$q^2\,\psi_{qq} + \left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\psi_{\vartheta\vartheta} + q\left(1+\frac{q^2}{a^2}\right)\psi_q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Diese Differentialgleichung wollen wir nach ihrem bisher erfolgreichsten Bearbeiter „Tschaplginsche Differentialgleichung" nennen. Im Unterschied zur ursprünglichen Strömungsgleichung ist die Tschapliginsche Differentialgleichung linear.

Tschaplign hat eine Reihe von Partikularlösungen seiner Differentialgleichung angegeben, die folgende Gestalt haben:

$$q^n f_n(q^2)\sin n\,\vartheta, \qquad q^n f_n(q^2)\cos n\,\vartheta.$$

Die Funktionen f_n genügen einer hypergeometrischen Differentialgleichung. Für manche Fälle hat Tschaplign sogar die Konvergenz der Entwicklung einer durch Randbedingungen festgelegten Lösung nach solchen Partikularlösungen bewiesen. F. Ringleb hat eine Partikularlösung dieser Art, nämlich $\frac{\sin\vartheta}{q}$, erörtert und in dieser Strömung Grenzlinien festgestellt.

Die charakteristischen Grundkurven der Tschapliginschen Differentialgleichung wollen wir als „charakteristische Hodographen" bezeichnen. Sie gehorchen der Differentialgleichung

$$\mathrm{d}\,\vartheta^2 - \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\mathrm{d}\,q^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

Den Machschen Wellen als den charakteristischen Grundkurven im Ortsplan sind die charakteristischen Hodographen im Geschwindigkeitsplan zugeordnet. Für diese Zuordnung bedarf man nicht der Tschapliginschen Differentialgleichung, sie folgt vielmehr mittels der Charakteristikentheorie gleich aus der Strömungsgleichung. Die charakteristischen Hodographen sind gut bekannt und werden in den sogenannten Charakteristikendiagrammen bei dem Prandtl-Busemannschen Verfahren[8]) zur graphischen Ermittlung von Überschallströmungen benutzt.

Wir setzen das Integral

$$\int\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}}\,\mathrm{d}\,q = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\sqrt{\frac{q^2}{a^2}-1} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{q^2}{a^2}-1} = Q(q) \quad . \; . \; . \quad (17).$$

Dann sind die beiden Scharen der charakteristischen Hodographen durch:

$$\xi = \vartheta + Q = \mathrm{const} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18\,\mathrm{a})$$

und

$$\eta = \vartheta - Q = \mathrm{const} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18\,\mathrm{b})$$

bestimmt. Für die spätere Verwendung merken wir uns die Normalform der Tschapliginschen Differentialgleichung für das Überschallgebiet an, die man bei Benutzung von ξ und η als unabhängigen Veränderlichen erhält:

$$4\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\psi_{\xi\eta} + \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{q^4}{a^3}\,\frac{1}{\sqrt{q^2-a^2}}\,(\psi_\xi - \psi_\eta) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19).$$

Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung, die noch als Funktionen von q geschrieben sind, hat man sich natürlich durch ξ und η ausgedrückt zu denken.

[8]) Vgl. Handbuch der Experimentalphysik Bd. 4, Teil 1, S. 424, Leipzig 1931.

2. Durch die Molenbroek-Tschapliginsche Transformation verlorene Strömungen.

Der Übergang von der Strömungsgleichung zur Tschapliginschen Differentialgleichung kommt auf die Benutzung der Geschwindigkeitskoordinaten q, ϑ anstatt der cartesischen Ortskoordinaten x, y als unabhängiger Veränderlicher für die Stromfunktion hinaus. Also müssen sich die Ortskoordinaten x, y als eindeutige Funktionen von q und ϑ ausdrücken lassen. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist die Transformation nicht gestattet.

Die eindeutige Umkehrbarkeit der Funktionen $q\,(x, y)$ und $\vartheta\,(x, y)$ ist nicht mehr gewährleistet, wenn die Funktionaldeterminante $\frac{\partial\,(q, \vartheta)}{\partial\,(x, y)}$ verschwindet. Wenn diese Funktionaldeterminante längs einer Kurve verschwände, so könnten in deren Umgebung zu demselben q-ϑ-Bereich verschiedene x-y-Bereiche gehören. Dann wäre nur eine entsprechende Abgrenzung der x-y-Bereiche nötig. Dagegen ist bei „identischem" Verschwinden der Funktionaldeterminante in einem x-y-Gebiete mit von 0 verschiedenem Flächeninhalt die Molenbroek-Tschapliginsche Transformation überhaupt nicht mehr anwendbar. Wenn die Strömungsgleichung in einem solchen Falle Integrale hat, so gehen diese beim Übergang zur Tschapliginschen Differentialgleichung verloren.

Zur Aufstellung dieser verlorenen Integrale benutzen wir die Kontinuitätsgleichung (5) unter Einführung des Ausdruckes (1) für ϱ und die Gleichung der Wirbelfreiheit (4):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a^2-u^2)-u\,v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}(a^2-v^2)=0 \quad \ldots \ldots \quad (20\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20\,\mathrm{b}).$$

Bei identischem Verschwinden von $\frac{\partial\,(q, \vartheta)}{\partial\,(x, y)}$ wird ϑ eine Funktion von q allein: $\vartheta\,(q)$. In den beiden Gl. (20) setzen wir $u=q\cos\vartheta$, $v=q\sin\vartheta$ und erhalten dann:

$$\frac{\partial q}{\partial x}\left\{(a^2-q^2)\cos\vartheta-\frac{d\vartheta}{dq}\,q\,a^2\sin\vartheta\right\}+\frac{\partial q}{\partial y}\left\{(a^2-q^2)\sin\vartheta+\frac{d\vartheta}{dq}\,q\,a^2\cos\vartheta\right\}=0 \quad \ldots \quad (21\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}\left\{\sin\vartheta+\frac{d\vartheta}{dq}\,q\cos\vartheta\right\}-\frac{\partial q}{\partial y}\left\{\cos\vartheta-\frac{d\vartheta}{dq}\,q\sin\vartheta\right\}=0 \quad \ldots \ldots \quad (21\,\mathrm{b}).$$

Damit dies homogene lineare Gleichungssystem für $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial y}$ nicht triviale Lösungen hat, d. h. damit q nicht identisch konstant wird, muß nach der Determinantenbedingung

$$\left(\frac{d\vartheta}{dq}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

sein. Diese Beziehung für die gesuchte Funktion $\vartheta\,(q)$ liefert zusammen mit (21 b) den Neigungstangens für die Linien konstanter Geschwindigkeit q:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial y}}=-\frac{\cos\vartheta-\frac{d\vartheta}{dq}\,q\sin\vartheta}{\sin\vartheta+\frac{d\vartheta}{dq}\,q\cos\vartheta}.$$

Da nach (22)

$$\frac{d\vartheta}{dq}\,q=\pm\frac{\sqrt{q^2-a^2}}{a}=\pm\operatorname{ctg}\alpha$$

sein soll, wo α der Machsche Winkel ist, so erhält man schließlich für den erwähnten Neigungstangens $\operatorname{tg}\,(\vartheta\pm\alpha)$, d. h. die Linien mit konstantem q fallen mit einer Schar Machscher Wellen zusammen. Da ϑ und α als Funktionen von q allein auf einer solchen Schar ebenfalls konstant sind, ist der Neigungstangens jeder Machschen Welle dieser Schar konstant. Diese Machschen Wellen sind also Geraden. ψ ist natürlich längs dieser Geraden veränderlich, während q und ϑ konstant sind, so daß ψ unmöglich als Funktion von q und ϑ betrachtet werden kann, wie die Molenbroek-Tschapliginsche Transformation es will.

Diese „verlorenen Strömungen" sind sehr geläufig, sie treten als Überschallströmungen bei einseitiger Begrenzung auf. Daß die Schar geradliniger Machscher Wellen einer solchen Überschallströmung auch eine Enveloppe bilden kann, erkennt man bei Annahme

einer Begrenzung durch eine Wand, die zunächst eben, dann mit der Höhlung nach der Strömung zu gekrümmt ist. Eine Enveloppe Machscher Wellen wird in einem solchen Falle bei Verzögerung und Kompression gebildet, während in den bekannten Beispielen zu der folgenden allgemeinen Theorie (vgl. Abschnitt 5) die Enveloppenbildung bei Beschleunigung und Expansion auftritt (s. Bild 1 und 2).

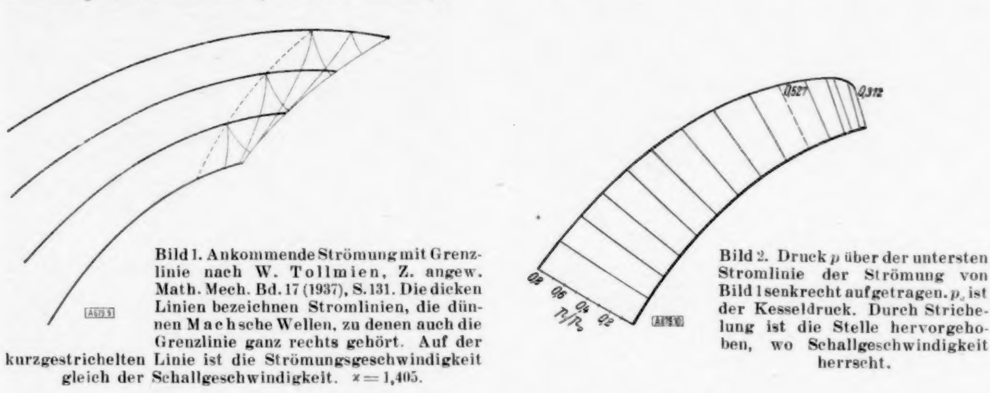


Bild 1. Ankommende Strömung mit Grenzlinie nach W. Tollmien, Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 131. Die dicken Linien bezeichnen Stromlinien, die dünnen Machsche Wellen, zu denen auch die Grenzlinie ganz rechts gehört. Auf der kurzgestrichelten Linie ist die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit. $\varkappa = 1{,}405$.

Bild 2. Druck p über der untersten Stromlinie der Strömung von Bild 1 senkrecht aufgetragen. p_0 ist der Kesseldruck. Durch Strichelung ist die Stelle hervorgehoben, wo Schallgeschwindigkeit herrscht.

3. Mehrdeutigkeit von Strömungen an der Grenzlinie.

Fortan beschäftigen wir uns nur noch mit Strömungen, die wir uns aus regulären Lösungen $\psi(q, \vartheta)$ der Tschapliginschen Differentialgleichung gewonnen denken können. Die Stromfunktion ψ und die Ortskoordinaten x, y seien als eindeutige Funktionen von q und ϑ gegeben. Es erhebt sich nun die Frage, ob man diese Funktionen $x(q, \vartheta)$ und $y(q, \vartheta)$ immer eindeutig umkehren kann. Diese Frage ist das Gegenstück zu der im vorigen Abschnitt. Wir wollen jetzt wissen, wann wir mit der Möglichkeit rechnen können, daß zu einem Wertepaar x, y verschiedene Wertepaare q, ϑ gehören, so daß eine Mehrdeutigkeit der Strömung im Ortsplan (x-y-Bereich) statthat.

Die Eindeutigkeit der Umkehrung ist nicht mehr gewährleistet, wenn die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \vartheta)}$ verschwindet. Diese Funktionaldeterminante wird nach (14) berechnet:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \vartheta)} = -\frac{1}{\varrho^2 q}\left\{\psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Zunächst zeigen wir, daß diese Funktionaldeterminante nicht in einem q-ϑ-Bereich mit von 0 verschiedenem Flächeninhalt verschwinden kann. Wäre es an dem, so würde die Tschapliginsche Differentialgleichung überschüssige Integrale liefern, welchen nicht Lösungen der Strömungsgleichung entsprechen.

Zum Beweise nehmen wir identisches Verschwinden der Funktionaldeterminante an. In dem betreffenden Gebiete würde dann die Differentialgleichung

$$\psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2 = 0$$

gelten, was höchstens im Überschallgebiet möglich wäre. Führen wir als unabhängige Veränderliche ξ und η nach (18) ein, so bekommt man daraus die Differentialgleichung:

$$(\psi_\xi - \psi_\eta)^2 = (\psi_\xi + \psi_\eta)^2$$

mit den beiden Möglichkeiten $\psi_\xi = 0$ oder $\psi_\eta = 0$. Beide Male erhält man einen Widerspruch zu der Tschapliginschen Differentialgleichung in ihrer Normalform (19).

Im Unterschallgebiet $q < a$ kann die Funktionaldeterminante nur in einem Punkte $\psi_q = 0$, $\psi_\vartheta = 0$ verschwinden. Daß ein solcher Punkt ein Staupunkt ist, liegt nahe und wird auch von Ringleb behauptet. Sein Beweis ist aber nicht stichhaltig, da er in diesem Falle noch das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \vartheta)}$ voraussetzt. Wir schließen so: Das Differential

$$d\psi = \psi_q\, dq + \psi_\vartheta\, d\vartheta$$

verschwindet im Punkte $\psi_q = 0$, $\psi_\vartheta = 0$. Andererseits ist dies Differential nach (10b):

$$d\psi = \varrho(u\, dy - v\, dx).$$

Da $\mathrm{d}\,y$ zu $\mathrm{d}\,x$ im beliebigen Verhältnis stehen kann, müssen $u=0$, $v=0$ sein, damit $\mathrm{d}\,\psi$ immer verschwindet. Also ist der Punkt $\psi_q=0$, $\psi_\vartheta=0$ ein Staupunkt. Das gleichzeitige Verschwinden von ψ_q und ψ_ϑ ist hiermit vollständig erledigt und kann im folgenden stets ausgeschlossen werden.

Im Überschallgebiet $q>a$ besteht noch die Möglichkeit, daß die Funktionaldeterminante längs einer Kurve des Geschwindigkeitsplanes verschwindet, wofür auch Beispiele vorliegen. Eine solche Kurve wollen wir „Grenzhodograph" nennen, während die zugehörige Bildkurve im Ortsplan eine Grenzlinie ist. Es ist nämlich wegen des Verschwindens der Funktionaldeterminante damit zu rechnen, daß in der Umgebung einer so definierten Grenzlinie zu den x-y-Werten verschiedene q-ϑ-Werte und damit auch verschiedene ψ-Werte gehören. Die Integralfläche $\psi\,(x,y)$ würde dann an der Grenzlinie eine Rückkehrkante haben. Um diese Vermutung zu bestätigen, werden wir das Verhalten der Stromlinien $\psi=\mathrm{const}$, d. i. der Höhenlinien der Integralfläche $\psi\,(x,y)$ erörtern.

Eine maßgebende Funktionaldeterminante der Molenbroek-Tschapliginschen Transformation hat uns also zwanglos auf die Gleichung des Grenzhodographen:

$$\psi_q^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24)$$

geführt. Da die weiteren Untersuchungen zu einem guten Teil in dem bequemen Geschwindigkeitsplan angestellt werden, wollen wir die Gl. (24) für das Geschwindigkeitsbild der Grenzlinie als „Grenzgleichung" schlechthin bezeichnen. Im folgenden werden wir aber diese Grenzgleichung nicht voraussetzen, sondern sie jeweils aufs neue aus den eingangs erwähnten, von Beispielen her bekannten singulären Eigenschaften ableiten, welche die Stromlinien, das Druckgefälle und die Machschen Wellen an der Grenzlinie aufweisen.

4. Stromlinien und Druckgefälle an der Grenzlinie.

Längs einer Stromlinie $\psi=\mathrm{const}$ gilt:

$$\psi_q\,\mathrm{d}\,q+\psi_\vartheta\,\mathrm{d}\,\vartheta=0,$$

also

$$\mathrm{d}\,\vartheta=-\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta}\,\mathrm{d}\,q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (25)^{9)}.$$

Setzen wir dies in (14) ein, so bekommen wir für die Komponenten des Linienelementes einer Stromlinie:

$$\mathrm{d}\,x=\frac{\cos\vartheta}{\varrho\,\psi_\vartheta}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2-\psi^2\right]\mathrm{d}\,q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26\mathrm{a}),$$

$$\mathrm{d}\,y=\frac{\sin\vartheta}{\varrho\,\psi_\vartheta}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2-\psi_q^2\right]\mathrm{d}\,q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26\mathrm{b}).$$

q ist also hier als Parameter längs der Stromlinie genommen. Aus (26) ergibt sich das Linienelement einer Stromlinie:

$$\mathrm{d}\,s=\frac{1}{\varrho\,\psi_\vartheta}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2-\psi_q^2\right]\mathrm{d}\,q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27).$$

Für das Druckgefälle

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\varrho\,q\,\frac{\partial q}{\partial s}$$

in Stromrichtung erhält man aus der letzten Gl. (27):

$$\frac{\partial\,p}{\partial\,s}=\frac{\varrho^2\,q\,\psi_\vartheta}{\psi_q^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (28).$$

Damit das Druckgefälle unendlich wird, muß wieder die Grenzgleichung (24) gelten. Daß nicht etwa ein Verschwinden von ψ_ϑ (im Zähler von (28)) diesen Schluß umstößt, werden wir bald durch eine kleine Diskussion der Grenzgleichung sehen.

[9]) Wenn ein Verschwinden von ψ_ϑ befürchtet wird, so kann man die Beziehung $\mathrm{d}\,q=-\frac{\psi_\vartheta}{\psi_q}\,\mathrm{d}\,\vartheta$ benutzen; ein gleichzeitiges Verschwinden von ψ_ϑ und ψ_q kommt ja nach einer früheren Bemerkung nicht mehr in Frage. Man würde auch mit dieser Beziehung bei den nachfolgenden Betrachtungen genau so gut wie mit (25) auf die Grenzgleichung kommen.

Als Bedingung für das Auftreten singulärer Punkte $\left(\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{0}{0}\right)$ der Stromlinien erhalten wir nach (26) ebenfalls die Grenzgleichung.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes finden sich bereits bei F. Ringleb, wenn auch mit etwas anderer Herleitung.

Wir bemerken an der Grenzgleichung, daß ψ_q für die Grenzlinie nur dann 0 werden kann, wenn $q=a$ ist; das gleichzeitige Verschwinden von ψ_q und ψ_ϑ wurde ja ausgeschlossen. ψ_ϑ kann für die Grenzlinie nur verschwinden, wenn $a=0$ ist, was uns wegen des dann bestehenden Vakuums auch nichts angeht.

Die Art der singulären Punkte der Stromlinien auf der Grenzlinie erkennt man leicht, wenn man sich daran erinnert, daß die Richtung der Stromlinien durch den Wert der Molenbroek-Tschapliginschen unabhängigen Veränderlichen ϑ in dem betreffenden Punkte der Grenzlinie eindeutig gegeben ist. Die Stromlinien könnten also entweder knickfrei die Grenzlinie durchlaufen oder sie kehren mit derselben Richtung unter Bildung einer Schnabelspitze um. Im allgemeinen liegt der zweite Fall vor, da der Ausdruck

$$\psi_q^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

an der Grenzlinie in der Regel eine einfache Nullstelle hat, während ψ_ϑ nach der obigen Bemerkung dort nicht verschwinden kann. Dann erleiden $d\,x$ und $d\,y$ nach (26) an der Grenzlinie einen Vorzeichenwechsel, die Stromlinien kehren um.

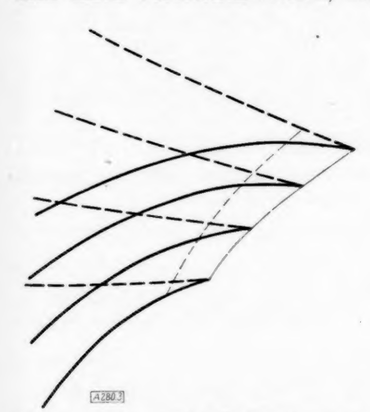


Bild 3. Ankommende Strömung wie in Bild 1 mit Rückkehrströmung. Die Stromlinien der ankommenden Strömung sind ausgezogen, die der Rückkehrströmung langgestrichelt. Auf der kurzgestrichelten Linie herrscht für die ankommende Strömung Schallgeschwindigkeit.

Daß der Ausdruck (29) im allgemeinen eine einfache Nullstelle hat, kann man an seiner Ableitung längs einer Stromlinie nach einem Parameter, als welchen wir q wählen, erkennen. Unter Berücksichtigung von (25) erhält man für diese Ableitung

$$\left.\begin{aligned} & 2\,\psi_{qq}\,\psi_q+2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_{\vartheta\vartheta}\,\psi_q \\ & \qquad -\frac{2\,\psi_{q\vartheta}}{\psi_\vartheta}\left[\psi_q^2+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2\right] \\ & \qquad -\left[\frac{4\,q}{(\varkappa-1)\,(1-q^2)^2}+\frac{2}{q^3}\right]\psi_\vartheta^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (30).$$

Die Tschapliginsche Differentialgleichung und die Grenzgleichung erzwingen nicht unmittelbar das Verschwinden dieser Ableitung (30), so daß der Ausdruck (29) im allgemeinen sein Vorzeichen an der Grenzlinie wechselt. Die bekannten Beispiele zeigen denn auch eine Rückkehr der Stromlinie.

Die an der Grenzlinie „ankommende Strömung" würde also formal durch die „Rückkehrströmung" fortgesetzt (s. Bild 3). Einen physikalischen Sinn hat diese Art der Fortsetzung natürlich nicht.

5. Machsche Wellen an der Grenzlinie.

Von den Beziehungen der Grenzlinie zu den Machschen Wellen weisen wir zunächst die Tatsache nach, daß die Grenzlinie selbst eine Machsche Welle ist.

Zu dem Zweck transformieren wir die Differentialgleichung (9) der Machschen Wellen auf die Veränderlichen ψ, q, ϑ, indem wir $u=q\cos\vartheta$, $v=q\sin\vartheta$ setzen und $d\,x$ und $d\,y$ aus (14) entnehmen. Diese Rechnung ergibt unmittelbar

$$\left[a^2\,\psi_q^2+\left(\frac{a^2}{q^2}-1\right)\psi_\vartheta^2\right]d\,\vartheta^2+\left[a^2\left(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2\psi_\vartheta^2+\left(\frac{a^2}{q^2}-1\right)\psi_q^2\right]d\,q^2=0.$$

Nach einer kleinen Umordnung erhält man die transformierte Differentialgleichung der Machschen Wellen in der endgültigen Form:

$$\left[d\,\vartheta^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)d\,q^2\right]\left[\psi_q^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Man bekommt beim Verschwinden der ersten Klammer von (31) diejenigen Machschen Wellen, die im Geschwindigkeitsplan durch die charakteristischen Hodographen (16) dar-

gestellt sind. Außerdem erhält man aber noch als Machsche Welle die Grenzlinie, deren Gleichung im Geschwindigkeitsplan

$$\psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2 = 0$$

ist.

An den Beispielen war seinerzeit von mir festgestellt worden, daß die Grenzlinie eine Schar Machscher Wellen einhüllt. Damit ist keineswegs gesagt, daß der Grenzhodograph als Geschwindigkeitsbild der Grenzlinie die Bilder einer Schar Machscher Wellen im Geschwindigkeitsplan, also eine Schar charakteristischer Hodographen einhüllt. Tatsächlich kennt man ja die charakteristischen Hodographen sowohl formelmäßig (18) als auch anschaulich aus den sogenannten Charakteristikendiagrammen des Prandtl-Busemannschen Verfahrens, wo q und ϑ als Polarkoordinaten der charakteristischen Hodographen aufgetragen sind. Die charakteristischen Hodographen besitzen danach keine Enveloppe außer bei der Ausströmungsgeschwindigkeit ins Vakuum ($q = 1$).

Während der eingangs durchgeführte Beweis, daß die Grenzlinie eine Machsche Welle ist, sich genau so bei F. Ringleb findet, ist der zum Schluß seiner Arbeit unternommene Beweisversuch, daß die Grenzlinie eine Schar Machscher Wellen einhüllt, mißglückt, da er im Geschwindigkeitsplan bleibt. Ringleb kombiniert mit der Grenzgleichung die Beziehung

$$\psi_q \, \mathrm{d} q + \psi_\vartheta \, \mathrm{d} \vartheta = 0,$$

die auf einer Stromlinie gelten würde. Dann würde die Grenzgleichung in die Differentialgleichung der charakteristischen Hodographen (16) übergehen. Daraufhin wird der verblüffende Schluß gezogen, daß die Grenzlinie Einhüllende der Machschen Wellen und der Stromlinien ist. Tatsächlich kann die Grenzlinie als Machsche Welle nicht mit einer Stromlinie zusammenfallen, es sei denn im Vakuum, wo dann auch wirklich die charakteristischen Hodographen eine altbekannte Enveloppe besitzen.

Das Verhalten einer Schar Machscher Wellen an der Grenzlinie untersuchen wir, indem wir die Linienelemente der Machschen Wellen aufstellen, also in den Ortsplan zurückgehen. Da für eine Schar Machscher Wellen im Geschwindigkeitsplan nach (16)

$$\mathrm{d}\vartheta = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\, \mathrm{d} q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

gilt, worin beide Wurzelvorzeichen möglich sind, je nachdem welche Schar ausgewählt ist, so erhält man nach (14) als Komponenten der Linienelemente einer Schar Machscher Wellen

$$\mathrm{d} x = \frac{1}{\varrho q}\left\{-\left[\cos\vartheta\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{q}\psi_\vartheta + \sin\vartheta\,\psi_q\right] + \left[\cos\vartheta\, q\,\psi_q - \sin\vartheta\,\psi_\vartheta\right]\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\right\}\mathrm{d} q,$$

$$\mathrm{d} y = \frac{1}{\varrho q}\left\{\left[-\sin\vartheta\left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{q}\psi_\vartheta + \cos\vartheta\,\psi_q\right] + \left[\sin\vartheta\, q\,\psi_q + \cos\vartheta\,\psi_\vartheta\right]\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\right\}\mathrm{d} q.$$

Nach einer kleinen Umordnung bekommt man:

$$\mathrm{d} x = \frac{1}{\varrho q}\left[\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\, q\cos\vartheta - \sin\vartheta\right]\left[\psi_q + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\,\psi_\vartheta\right]\mathrm{d} q \quad \ldots \quad (33\mathrm{a}),$$

$$\mathrm{d} y = \frac{1}{\varrho q}\left[\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\, q\sin\vartheta + \cos\vartheta\right]\left[\psi_q + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\,\psi_\vartheta\right]\mathrm{d} q \quad \ldots \quad (33\mathrm{b}).$$

Die beiden vorderen Klammern in (33a) und (33b) könnten gleichzeitig nur bei $\frac{q}{a} = 0$ verschwinden, was bei Vorhandensein Machscher Wellen sinnlos ist. Als Ort der singulären Punkte $\left(\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{0}{0}\right)$ einer Schar Machscher Wellen ergibt sich die Grenzlinie, deren Gleichung im Geschwindigkeitsplan jetzt in der Form:

$$\psi_q + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}\,\psi_\vartheta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

auftritt. Hiermit ist wiederum eine neue Definition der Grenzlinie gewonnen.

Da die Wurzel in der Gl. (34) auf einer bestimmten Grenzlinie nur ein ganz bestimmtes Vorzeichen haben kann, so geht aus dem Beweisgang hervor, daß jeweils nur eine Schar Machscher Wellen auf der Grenzlinie singuläre Punkte haben kann, die wegen der bekannten Eigenschaften der Stromlinien an der Grenzlinie nur Schnabelspitzen sein können.

Für den Beweis, daß die andere Schar Machscher Wellen von der Grenzlinie eingehüllt wird, benötigen wir die grundlegende Tatsache, daß das Geschwindigkeitsbild der Grenzlinie kein charakteristischer Hodograph ist.

Würde der Grenzhodograph ein charakteristischer Hodograph sein, so müßten für ihn gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right) \psi_\vartheta^2 = 0,$$

$$d\vartheta^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right) d q^2 = 0$$

gelten. Durch Elimination von $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)$ würde sich daraus als notwendige Bedingung für den Richtungstangens[10]) $\frac{d\vartheta}{dq}$ des Grenzhodographen die Beziehung

$$\frac{d\vartheta}{dq} = -\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta} \quad \text{. . . . . (35a)}$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dq} = \frac{\psi_q}{\psi_\vartheta} \quad \text{. . . . . (35b)}$$

ergeben. Nun ist $-\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta}$ der Richtungstangens eines Stromlinienbildes. Also würde die erste Möglichkeit (35a) Zusammenfallen der Grenzlinie mit einer Stromlinie bedeuten; denn die Richtungsübereinstimmung überträgt sich aus dem Geschwindigkeitsplan in den Ortsplan, obwohl das Umgekehrte in der Nähe der Grenzlinie nicht mehr gilt. Die Grenzlinie als Machsche Welle kann aber mit einer Stromlinie nur im Vakuum zusammenfallen. Bei der zweiten Möglichkeit (35b) gehen wir von der nach (16) folgenden Bemerkung aus, daß auch $-\frac{d\vartheta}{dq}$ Richtungstangens eines charakteristischen Hodographen sein würde, falls das von $\frac{d\vartheta}{dq}$ gelten würde, was wir bis zur Aufweisung eines Widerspruchs gerade annahmen. Nach (35b) müßte also jetzt der Richtungstangens $-\frac{d\vartheta}{dq}$ eines charakteristischen Hodographen mit dem Richtungstangens $-\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta}$ eines Stromlinienbildes zusammenfallen. Nach der Übertragbarkeit einer Richtungsübereinstimmung aus dem Geschwindigkeitsplan in den Ortsplan hätte man auf Übereinstimmung der Richtung von Machschen Wellen und Stromlinien zu schließen, was nur im Vakuum möglich wäre. Der innere Grund für die Notwendigkeit, die beiden Möglichkeiten (35a) und (35b) zu berücksichtigen, liegt darin, daß es zwei Scharen Machscher Wellen in der Umgebung der Grenzlinie gibt.

Die zur Diskussion stehende lückenlos den Geschwindigkeitsplan überdeckende Schar charakteristischer Hodographen wird also durch den Grenzhodographen geschnitten. Übertragen wir nun diese charakteristischen Hodographen aus dem Geschwindigkeitsplan als Machsche Wellen in den Ortsplan, so treffen diese die Grenzlinie. Da die Grenzlinie als Machsche Welle genau so gut den Machschen Winkel mit den Stromlinien einschließt wie die betreffende Schar Machscher Wellen, so hüllt die Grenzlinie diese Schar Machscher Wellen ein. Dabei ist, wie wir schon früher bemerkten, von den beiden Scharen Machscher Wellen diejenige genommen, welche keine singulären Punkte an der Grenzlinie hat.

Die Anwendung der Charakteristikentheorie auf die Strömungsgleichung (7) liefert im Geschwindigkeitsplan nur die charakteristischen Hodographen, dagegen kein Geschwindigkeitsbild der Grenzlinie, obwohl die Grenzlinie als Machsche Welle eine charakteristische Grundkurve ist. Dies ist jetzt nicht weiter verwunderlich, da die Grenzlinie als Enveloppe Machscher Wellen keine neuen charakteristischen Linienelemente auf der Integralfläche $\psi(x, y)$ einführt, die nicht schon den charakteristischen Hodographen zugeordnet sind, sondern nur eine andere Zusammenfassung dieser charakteristischen Linienelemente vornimmt.

Beiläufig wollen wir bemerken, daß man aus der Differentialgleichung (9) der Machschen Wellen auch mit der Legendreschen Transformation eine kennzeichnende Beziehung für die Grenzlinie erhalten kann. Diese Legendresche Transformation linearisiert die Differentialgleichung (8) für das Potential φ. Als neue unabhängige Veränderliche werden

[10]) Wir denken uns jetzt einmal der einfacheren Ausdrucksweise wegen q und ϑ als cartesische Koordinaten aufgetragen.

$u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$ eingeführt, als neue abhängige Veränderliche $\chi = u x + v y - \varphi$. Die Umrechnung der Differentialrechnung (9) der Machschen Wellen auf die neuen Veränderlichen ergibt

$$[(a^2 - u^2)\,\mathrm{d}u^2 - 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (a^2 - v^2)\,\mathrm{d}v^2]\,[\chi_{uv}^2 - \chi_{uu}\chi_{vv}] = 0.$$

Während das Verschwinden der ersten Klammer dieser Gleichung die charakteristischen Hodographen definiert, kennzeichnet

$$\chi_{uv}^2 - \chi_{uu}\chi_{vv} = 0$$

die Grenzlinie. Dieselbe Beziehung würde aus dem Verschwinden der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ folgen. Einen Aufbau der Grenzlinientheorie von dieser neuen Grundlage aus haben wir aber nicht unternommen.

6. Nichtfortsetzbarkeit von Strömungen mit Grenzlinie.

Bis zum Beweis des Gegenteils nehmen wir vorläufig an, daß die berechnete ankommende Strömung bis zur Grenzlinie verwirklicht werden kann. Wir fragen nach der physikalischen Fortsetzung dieser Strömung. Wie in der ganzen Abhandlung beschränken wir uns stets auf stationäre ebene Strömungen.

Zwei Möglichkeiten der Fortsetzung haben wir zu unterscheiden. Die „Fortsetzungsströmung" kann entweder ohne Unstetigkeit in den Geschwindigkeiten an die ankommende Strömung anschließen oder die Grenzlinie wird Träger von Geschwindigkeitssprüngen. Geschwindigkeitssprünge bedeuten Unstetigkeiten in den ersten Ableitungen von ψ nach den Ortskoordinaten.

Wir betrachten zuerst die zweite Möglichkeit. In dem Falle würde die Grenzlinie Front eines Verdichtungsstoßes sein; denn eine Wirbelschicht können die Geschwindigkeitssprünge nicht bilden, da die Grenzlinie keine Stromlinie ist. Nach der Verdichtungsstoßtheorie (vgl. etwa die Busemannsche Stoßpolare) ist bei gegebener Anströmgeschwindigkeit der Geschwindigkeitssprung eindeutige Funktion des Winkels der Stoßfront mit der Anströmungsrichtung. Die Grenzlinie als Stoßfront würde mit der Anströmungsrichtung den Machschen Winkel bilden. Bei diesem Winkel verschwindet aber nach der Verdichtungsstoßtheorie der Geschwindigkeitssprung.

Bei der übrigbleibenden Möglichkeit sind also beim Durchgang durch die Grenzlinie nicht nur die Stromfunktion ψ, sondern auch die Geschwindigkeitsgrößen q und ϑ sowie Druck und Dichte stetig. Die Strömung müßte beim Überschreiten der Grenzlinie adiabatisch und darum wirbelfrei bleiben. Man hat dann noch zwei Fälle zu unterscheiden, erstens Fortsetzung durch verlorene Strömungen (vgl. Abschnitt 2), zweitens Fortsetzung durch Strömungen, die aus der Tschapliginschen Differentialgleichung gewonnen werden können.

Um den ersten Fall zu behandeln, erinnern wir uns, daß bei den verlorenen Strömungen die Kurven mit konstantem q Geraden sind, auf denen gleichzeitig ϑ konstant ist. Ist nun auf der Grenzlinie oder jedenfals auf einem Stück der Grenzlinie q konstant, so müßte dort wegen des erforderlichen stetigen Anschlusses der ankommenden Strömung an eine verlorene Strömung auch ϑ konstant sein und die Grenzlinie müßte dort geradlinig verlaufen, was in jedem Einzelfalle leicht zu widerlegen wäre. Wir können aber auch allgemein schließen. Da die ankommende Strömung nämlich bis zur Grenzlinie einschließlich voraussetzungsgemäß aus der Tschapliginschen Differentialgleichung gewonnen werden kann, so können auf der Grenzlinie q und ϑ nicht gleichzeitig konstant sein, weil ψ dann nicht als Funktion von q und ϑ aufgefaßt werden könnte. Wenn nun andererseits q auf der Grenzlinie nicht konstant ist, so muß wegen des stetigen Anschlusses ϑ als Funktion von q wiederum aus der Theorie der verlorenen Strömungen, also jetzt aus Gl. (22), bestimmt sein. Diese Gleichung ist aber nichts anderes als die charakteristische Hodographengleichung (16), die für die Grenzlinie gerade nicht gilt, wie wir im Abschnitt 5 bewiesen.

Als letzter Ausweg ist demnach nur noch die Fortsetzung durch eine Strömung geblieben, die aus einer Tschapliginschen Differentialgleichung gewonnen werden kann. Wir suchen jetzt die Fortsetzungsströmung aus einem Anfangswertproblem der Tschapliginschen Differentialgleichung zu bestimmen. Die Anfangswerte müssen natürlich auf dem Grenzhodographen angegeben werden. Auf allfällige Randeinflüsse kommen wir noch zu sprechen.

Auf den Grenzhodographen führen wir einen Parameter σ ein. Als Funktionen dieses Parameters sind $\psi(\sigma)$, $q(\sigma)$, $\vartheta(\sigma)$, $\varrho(\sigma)$ aus der ankommenden Strömung wegen des stetigen Anschlusses von Stromfunktion, Geschwindigkeiten und Dichte auch für die Fortsetzungs-

strömung bekannt. Ferner kennen wir die Koordinaten der Grenzlinie $x(\sigma)$, $y(\sigma)$. Da nach (10b) in der ankommenden Strömung

$$\mathrm{d}\psi = \varrho u \,\mathrm{d}y - \varrho v \,\mathrm{d}x$$

sein muß, so besteht zwischen diesen sechs Funktionen die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\sigma} = \varrho q \cos\vartheta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma} - \varrho q \sin\vartheta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36).$$

Als erste Anfangsbedingung ist $\psi(\sigma)$ auf dem Grenzhodographen gegeben. Da der Grenzhodograph kein charakteristischer Hodograph ist, so müssen zur vollständigen Stellung des Anfangswertproblems noch die beiden Ableitungen ψ_q und ψ_ϑ für die Fortsetzungsströmung auf dem Grenzhodographen gegeben sein. Dabei ist zu beachten, daß man noch nicht weiß, ob ψ_q und ψ_ϑ beim Übergang von der ankommenden Strömung zur Fortsetzungsströmung stetig bleiben. Aus diesem Grunde darf die Gleichung

$$\psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right) \psi_\vartheta^2 = 0,$$

welche für den Grenzhodographen der ankommenden Strömung gilt, nicht benutzt werden. Zur Verfügung stehen uns die beiden Gl. (14), welche für jede aus der Tschapliginschen Differentialgleichung erzielbare Strömung, also auch die vermutete Fortsetzungsströmung, gelten. Diese beiden Gleichungen liefern für den Anfang der Fortsetzungsströmung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{\varrho q}\left\{-\left[\cos\vartheta\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{q}\psi_\vartheta + \sin\vartheta\,\psi_q\right]\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\sigma} + \left[\cos\vartheta\, q\,\psi_q - \sin\vartheta\,\psi_\vartheta\right]\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\sigma}\right\} \quad . \; . \; (37\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{\varrho q}\left\{\left[-\sin\vartheta\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\frac{1}{q}\psi_\vartheta + \cos\vartheta\,\psi_q\right]\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\sigma} + \left[\sin\vartheta\, q\,\psi_q + \cos\vartheta\,\psi_\vartheta\right]\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\sigma}\right\} \quad . \; . \; (37\,\mathrm{b}).$$

Außerdem gilt noch die Gleichung

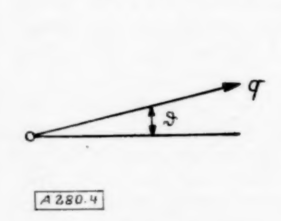
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\sigma} = \psi_q \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\sigma} + \psi_\vartheta \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\sigma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (38).$$

Wegen der Bedingung (36) folgt diese Gl. (38) aus den beiden vorhergehenden, so daß (38) nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht. Aus den beiden Gl. (37) lassen sich nun die gesuchten Anfangswerte ψ_q und ψ_ϑ für die Fortsetzungsströmung eindeutig bestimmen. Die Determinante dieses Gleichungssystems für ψ_q und ψ_ϑ wird nämlich

$$-\frac{1}{\varrho^2 q}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right\}.$$

Verschwände diese Determinante, so würde der Grenzhodograph ein charakteristischer Hodograph sein, was er bewiesenermaßen nicht ist.

Mit demselben Recht wie für die Fortsetzungsströmung könnte man die obige Betrachtung auch für die ankommende Strömung durchführen, und man erhielte die gleichen Werte ψ_q und ψ_ϑ, da die benutzten Funktionen $\psi(\sigma)$, $q(\sigma)$, $\vartheta(\sigma)$, $\varrho(\sigma)$, $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ für beide Strömungen die gleichen sind. Die ankommende und die Fortsetzungsströmung stimmen also nicht nur in ψ, sondern auch in ψ_q und ψ_ϑ längs des Grenzhodographen überein.



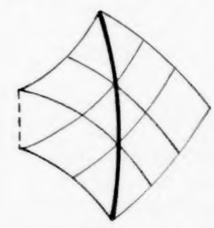


Bild 4. Abhängigkeitsgebiete der ankommenden Strömung von Bild 1 und der vermuteten Fortsetzungsströmung im Geschwindigkeitsplan. Die dicke Linie stellt den Grenzhodographen dar. Daß q auf dem Grenzhodographen dieses Bildes konstant ist, liegt nur an dem besonderen Beispiel. Die dünnen Linien sind charakteristische Hodographen. Auf der gestrichelten Linie ist $q = a$.

Wir betrachten nun einen solchen Bereich des Parameters σ, daß das entsprechende Stück der Grenzlinie $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ ganz innerhalb der Umrandung liegt, welche für die Strömung vorgesehen ist. Über dem entsprechenden Stück des Grenzhodographen denken wir uns die beiden „Abhängigkeitsgebiete" gemäß der Theorie linearer hyperbolischer Differentialgleichungen konstruiert (s. Bild 4). Das sind zwei krummlinige Dreiecke[11]) über dem Grenz-

[11]) In Bild 4 ist die Spitze eines dieser Dreiecke durch die gestrichelte Linie $q = a$ weggeschnitten, da nach Unterschreitung der Schallgeschwindigkeit die Tschapliginsche Differentialgleichung elliptisch ist. Die weggeschnittene Spitze gehört nicht mehr zum Abhängigkeitsgebiet im Sinne der Theorie hyperbolischer Differentialgleichungen.

hodographen als gemeinsamer Grundseite, deren andere Seiten durch charakteristische Hodographen gebildet werden. In diesen Abhängigkeitsgebieten ist nach der Theorie linearer hyperbolischer Differentialgleichungen $\psi(q, \vartheta)$ vollständig durch die Anfangsbedingungen auf dem Grenzhodographen bestimmt. Einflüsse irgendwelcher Randbedingungen machen sich in diesen Abhängigkeitsgebieten noch nicht bemerkbar.

Nun kennen wir bereits zwei Lösungen, welche sich mit den gleichen Werten ψ, ψ_q, ψ_ϑ auf dem Grenzhodographen aneinanderschließen; sie entsprechen der ankommenden Strömung und der Rückkehrströmung, die ja aus ein und demselben Integral der Tschapliginschen Differentialgleichung gewonnen wurden. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung durch die Anfangswerte ψ, ψ_q, ψ_ϑ auf dem Grenzhodographen muß die vermutete Fortsetzungsströmung in dem betreffenden Abhängigkeitsgebiet des Geschwindigkeitsplanes mit der Rückkehrströmung zusammenfallen. Im Ortsplan würde dies Übereinstimmung der Fortsetzungsströmung mit der Rückkehrströmung in der Nachbarschaft der Grenzlinie bedeuten, gleichgültig wie die Umrandung weitergeführt wird.

Damit entfällt auch die letzte noch offene Möglichkeit einer Fortsetzung der an der Grenzlinie ankommenden adiabatischen Potentialströmung durch eine stationäre ebene Strömung. Deshalb läßt sich die berechnete adiabatische Potentialströmung bis zur Grenzlinie hin nicht verwirklichen, sondern bricht schon stromaufwärts zusammen. Die physikalische Bedeutung dieses Sachverhaltes wird freilich erst dann endgültig klar werden, wenn es gelingt, die tatsächliche Strömung innerhalb einer Umrandung herzustellen, die bis zum Ort der Grenzlinie mit dem Rande der Grenzlinienströmung übereinstimmt. 280

Unstetigkeitsstellen in einem bewegten Kontinuum.

Von *W. Kucharski* in Berlin.

In Entwickelung eines von Christoffel u. a. angegebenen Verfahrens werden die Grundgleichungen aufgestellt, die an einer Unstetigkeitsstelle der maßgebenden physikalischen Größen in einem Kontinuum gelten. An einem Beispiel wird gezeigt, daß sich hieraus mit häufig zulässigen und üblichen Vernachlässigungen Beziehungen für die Sprunggrößen ergeben, in denen nur diese selbst und von vornherein gegebene Funktionen des betreffenden Problems vorkommen, nicht aber die Rand- oder Anfangsbedingungen. Ein Hauptergebnis besteht darin, daß sich bei den erwähnten Vereinfachungen die einzelne Unstetigkeitsstelle stets mit der „Schallgeschwindigkeit des Problems" fortpflanzt.

1. Einleitung. In den folgenden Abschnitten soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, wie man gewisse Aussagen über die maßgebenden physikalischen Größen gewinnen kann, wenn sich in einem bewegten Kontinuum eine Unstetigkeitsstelle z. B. für die Spannung, die Dehnung und die Geschwindigkeit befindet. Es handelt sich dabei um die Anwendung und Weiterbildung einer Methode, die, soweit ich aus der von mir benutzten Literatur ersehe, von Christoffel für lineare Saitenschwingungen und von Hugoniot für Vorgänge in strömenden Gasen benutzt wurde[1]). Es wird sich zeigen, daß man unter gewissen häufig erfüllten Voraussetzungen eine einfache Auskunft über die Geschichte der Unstetigkeitsstelle erhält, ohne daß die vollständige Lösung der betreffenden Differentialgleichung bekannt zu sein braucht.

Die Problemstellung wurde durch Untersuchungen an stabförmigen Ventilkörpern angeregt, deren Querschnittsverlauf in einer für die Weiterbehandlung des Problems brauchbaren Weise analytisch nur mit großen Umständlichkeiten faßbar war, so daß die vorstehend angedeutete Fragestellung, ob man nicht ohne Kenntnis der vollständigen Lösung Daten über die Größenordnung der auftretenden Spannungen und über ihre Beeinflussung durch den Querschnittsverlauf erhalten kann, sich fast von selbst ergab.

Mathematisch gesehen hängt diese Methode mit der Theorie der Charakteristiken der betreffenden hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zusammen[2]), von denen, wie bekannt, mehrere Integralflächen ausgehen und auf denen auch Unstetigkeiten gewisser Art bestehen können. Man findet hierüber im 2. Band von Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen

[1]) S. Frank-Mises: Differential-Gleichungen der Physik; Wien 1935, Band II, S. 323 usw.; ferner: Webster-Szegö: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Leipzig und Berlin 1930.

[2]) Hierauf wies Herr Hamel bei einem Seminarvortrag in dankenswerter Weise hin.

Physik, die allgemeinen Grundlagen. Diese weitreichenden Untersuchungen wurden bei der folgenden Arbeit, die seit etwa 8 Jahren im Manuskript vorlag, nicht benutzt. Die Veröffentlichung dürfte sich rechtfertigen, denn diese Methoden scheinen — jedenfalls in der technischen Mechanik — wenig bekannt zu sein; auch scheinen derartige Probleme in der letzten Zeit häufiger aufzutreten. Ich lasse es daher auch bei der ursprünglichen, eng an die physikalische Anschauung angelehnten Fassung bewenden; bei weiterer Ausbildung wird man naturgemäß auf die erwähnten mathematischen Grundlagen zurückgreifen müssen.

Im folgenden werden die Vorgänge in einem dünnen geradlinigen Stab untersucht. Die Methode läßt sich auch mit Vorteil auf Bewegungen von Saiten mit variabler Spannung und von dehnungslosen Seilen anwenden, worüber ich mehrfach vorgetragen habe und demnächst auch im Druck berichten werde.

2. Problemstellung, Bezeichnungen. In Bild 1 ist schematisch ein kurzes Stück eines geraden, aus homogenem Material bestehenden dünnen Stabes angedeutet, dessen Querschnitt F eine stetige und genügend oft differenzierbare Funktion der jeweils im ruhenden Raum in Richtung der Stabachse laufenden Koordinate x ist. Durch einen bei $0-0$ befindlichen Querschnitt, der sich mit der absoluten Geschwindigkeit c in Richtung der x-Achse bewegt, wird der Stab in zwei Abschnitte 1 und 2 unterteilt. In jedem dieser Abschnitte sollen die Spannungen σ, die Teilchengeschwindigkeiten v, die Dehnungen ε und die spezifische Masse μ bis an die Stelle $0-0$ heran stetig und genügend oft differenzierbar sein (d. h. so oft, wie es im folgenden notwendig wird). An der Stelle $0-0$ sollen aber die genannten Größen unstetig sein. Sind also l_1 bzw. l_2 kleine Längen, die von $0-0$ aus in die Gebiete 1 bzw. 2 gezogen werden, wird ferner für alles weitere die Bezeichnungsweise verabredet, daß sämtliche Größen im Abschnitt 1 den Index 1, im Abschnitt 2 den Index 2 erhalten sollen, und wird ferner

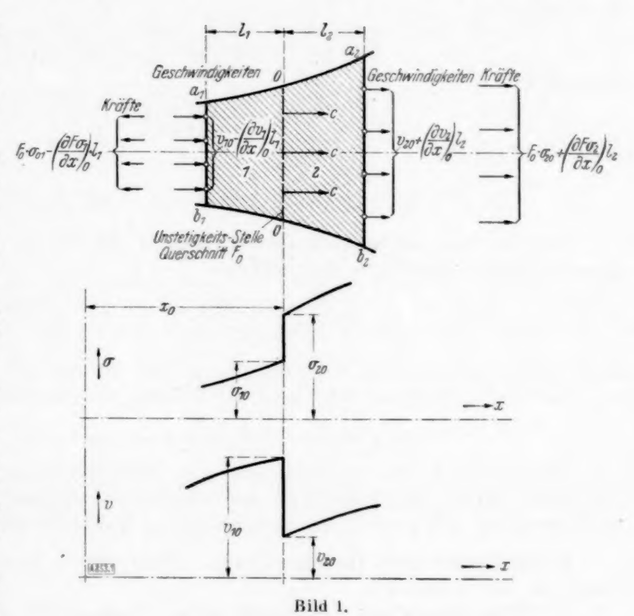


Bild 1.

$$\lim_{l_1 \to 0} A_1 = A_{10}; \quad \lim_{l_2 \to 0} A_2 = A_{20} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

gesetzt, wo A_1 irgendeine der interessierenden Größen an der durch l_1 festgelegten Stelle ist (entsprechend für A_2), so soll sein:

$$\sigma_{20} - \sigma_{10} \neq 0; \quad \varepsilon_{20} - \varepsilon_{10} \neq 0; \quad v_{20} - v_{10} \neq 0; \quad \mu_{20} - \mu_{10} \neq 0 \quad \dots \dots \quad (2).$$

In Bild 1 ist dies für σ und v schematisch angedeutet.

An den durch l_1 bzw. l_2 gegebenen Stellen seien ferner die Querschnitte $a_1 b_1$ bzw. $a_2 b_2$ gelegt, die sich, wie in Bild 1 angedeutet, mit der jeweiligen Teilchengeschwindigkeit bewegen. l_1 und l_2 seien von erster Ordnung klein gedacht; sie werden später beliebig klein gemacht. Durch die beiden genannten Querschnitte wird ein sich bewegendes Massenelement abgegrenzt, das in seinem Innern die Unstetigkeitsstelle enthält.

3. Die dynamische Grundgleichung. Für dieses Massenelement sei nun zuerst die dynamische Grundgleichung aufgestellt. Man könnte, wie es meist bei Ableitung der Differentialgleichung geschieht, von dem Newtonschen Gesetz ausgehen, würde dann aber an der Unstetigkeitsstelle, an welcher ja ein Spannungssprung besteht, auf Schwierigkeiten z. B. bezüglich des Wechselwirkungsgesetzes stoßen, die erst zu beseitigen wären. Viel einfacher kommt man zum Ziel, wenn man auf das abgegrenzte Element den Impulssatz anwendet, der hiermit in wohl unmittelbar plausibler Weise auch bei Unstetigkeiten als gültig angesehen wird. (Die angedeutete Schwierigkeit wird damit allerdings mehr umgangen als beseitigt; weiter soll aber hier auf diese Fragen nicht eingegangen werden; die Klärung wäre wohl durch einen Grenzübergang herbeizuführen.)

Bis auf Größen höherer Ordnung ist der Impuls des abgegrenzten Massenelementes:

$$J = F_0 (\mu_{10} \cdot l_1 \cdot v_{10} + \mu_{20} \cdot l_2 \cdot v_{20}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Dies läßt sich ohne weiteres nach der Zeit substantiell differenzieren; für das abgegrenzte Massenelement ist also:

$$\frac{\mathrm{d} J}{\mathrm{d} t} = F_0 \left[\mu_{10} \cdot v_{10} \cdot \frac{\mathrm{d} l_1}{\mathrm{d} t} + \mu_{20} v_{20} \cdot \frac{\mathrm{d} l_2}{\mathrm{d} t} + l_1 \cdot \frac{\mathrm{d}(F_0 \cdot \mu_{10} \cdot v_{10})}{\mathrm{d} t} + l_2 \cdot \frac{\mathrm{d}(F_0 \cdot \mu_{20} \cdot v_{20})}{\mathrm{d} t}\right] \quad \ldots \quad (4).$$

Hierin sind alle mit l_1 und l_2 multiplizierten Größen beschränkt; gehe ich also zur Grenze:

$$l_1 \to 0; \quad l_2 \to 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

so bleibt:

$$\left(\frac{\mathrm{d} J}{\mathrm{d} t}\right)_0 = F_0 \left[\mu_{10} \cdot v_{10} \cdot \left(\frac{\mathrm{d} l_1}{\mathrm{d} t}\right)_0 + \mu_{20} \cdot v_{20} \cdot \left(\frac{\mathrm{d} l_2}{\mathrm{d} t}\right)_0\right].$$

Offenbar ist:

$$\left(\frac{\mathrm{d} l_1}{\mathrm{d} t}\right)_0 = c - v_{10}; \quad \left(\frac{\mathrm{d} l_2}{\mathrm{d} t}\right)_0 = v_{20} - c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

so daß schließlich:

$$\left(\frac{\mathrm{d} J}{\mathrm{d} t}\right)_0 = F_0 \cdot [\mu_{10} \cdot v_{10} (c - v_{10}) - \mu_{20} \cdot v_{20} \cdot (c - v_{20})] \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Die auf das abgegrenzte Massenelement in der x-Richtung wirkende Kraft ist bei spannungsfreier Oberfläche des Stabes:

$$\sigma_{20} \cdot F_0 + \left(\frac{\partial (\sigma_2 \cdot F)}{\partial x}\right)_0 \cdot l_2 - \sigma_{10} \cdot F_0 + \left(\frac{\partial (\sigma_1 \cdot F)}{\partial x}\right)_0 \cdot l_1.$$

Hierin fallen wieder beim Grenzübergang nach (5) die mit l_1 bzw. l_2 multiplizierten Glieder fort; aus dem Impulssatz folgt also, da F_0 sich hier heraushebt:

$$\sigma_{20} - \sigma_{10} = \mu_{10} \cdot v_{10} (c - v_{10}) - \mu_{20} v_{20} (c - v_{20}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Dies ist die erste der zu benutzenden Hauptgleichungen; sie ist von dynamischer Art und beruht darauf, daß laut Gl. (7) die zunächst rein geometrisch definierte Unstetigkeitsstelle die Eigenschaft einer nicht verschwindenden, wohldefinierten Massenbeschleunigung besitzt.

4. Die kinematische Hauptgleichung. Eine zweite Hauptgleichung erhalten wir aus der Kinematik des Vorganges.

Die Längenänderung des abgegrenzten Massenelementes erfolgt einerseits nach Gl. (6), wobei sofort nach (5) zur Grenze gegangen wird:

$$\left(\frac{\mathrm{d}(l_1 + l_2)}{\mathrm{d} t}\right)_0 = v_{20} - v_{10} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Andererseits ist aber die Längenänderung auch durch die Dehnungen gegeben.

In Übereinstimmung mit der technischen Festigkeitslehre sei die Dehnung ε definiert durch:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0},$$

wenn L_0 die ungespannte Länge eines Stabes und L die Länge desselben Stabes unter der gleichmäßigen Zugspannung σ ist. Ist die gespannte Länge gegeben, wie bei l_1 und l_2, so ergibt sich hiernach die ungespannte zu

$$L_0 = \frac{L}{1 + \varepsilon}.$$

Sind l_{01} bzw. l_{02} die Längen von l_1 bzw. l_2 im ungespannten Zustand, so läßt sich schreiben:

$$l_1 + l_2 = l_{01} + l_{02} + l_1 \cdot \frac{\varepsilon_{10}}{1 + \varepsilon_{10}} + l_2 \cdot \frac{\varepsilon_{20}}{1 + \varepsilon_{20}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Von höherer Ordnung kleine Glieder sind hierbei bereits fortgelassen.

Beim Differenzieren von (9) nach t ist zu beachten, daß l_{01} bzw. l_{02} Konstante sind, die nach Wahl von l_1 bzw. l_2 festliegen. Geht man dann wieder nach (5) zur Grenze, so fallen wieder die mit l_1 oder l_2 multiplizierten Glieder fort, und es wird unter Benutzung von (6):

$$\left(\frac{\mathrm{d}(l_1 + l_2)}{\mathrm{d} t}\right)_0 = \varepsilon_{10} \cdot \frac{c - v_{10}}{1 + \varepsilon_{10}} - \varepsilon_{20} \cdot \frac{c - v_{20}}{1 + \varepsilon_{20}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Mit (8) zusammen ergibt dies:

$$v_{20} - v_{10} = \varepsilon_{10} \cdot \frac{c - v_{10}}{1 + \varepsilon_{10}} - \varepsilon_{20} \cdot \frac{c - v_{20}}{1 + \varepsilon_{20}} \quad \text{(II)}$$

als zweite Hauptgleichung. Sie ist rein kinematischer Art.

5. Das Elastizitätsgesetz. Durch das naturgemäß als bekannt anzusehende jeweilige Elastizitätsgesetz

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad \text{(III)}$$

ist eine dritte Beziehung gegeben, durch welche entweder die Spannungen oder die Dehnungen aus (I) oder (II) eliminiert werden können.

6. Die Gleichungen für die spezifische Masse. Eine weitere Beziehung ergibt sich aus der Erhaltung der Masse. Naturgemäß muß sein:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,(l_1\,\mu_1\,F_1 + l_2\,\mu_2\,F_2)}{\mathrm{d}\,t}\right)_0 = 0\,;$$

also:

$$\mu_{10} \cdot (c - v_{10}) = \mu_{20}\,(c - v_{20}) \quad \text{(IV)},$$

und hierzu tritt schließlich noch eine Gleichung von der Art:

$$\mu = \mu(\varepsilon) \quad \text{oder} \quad \mu = \mu(\sigma) \quad \text{(V)}.$$

7. Ein exaktes Ergebnis. Für den vorliegenden Fall kommt man auf folgende Weise zu einem ersten übersichtlichen Ergebnis: μ_0 sei die gleichmäßige spezifische Masse des Stabes im ungedehnten Zustand. Dann ist, wenn von der Querkontraktion (wie bisher) abgesehen wird:

$$\mu_{10} = \frac{\mu_0}{1 + \varepsilon_{10}}\,; \quad \mu_{20} = \frac{\mu_0}{1 + \varepsilon_{20}} \quad (11),$$

da ja

$$\mu_{10} \cdot l_1 \cdot F_0 = \mu_0 \cdot l_{01} \cdot F_0 \quad \text{und} \quad \mu_{20} \cdot l_{20} \cdot F_0 = \mu_0 \cdot l_{02} \cdot F_0\,.$$

Ferner sei eine Geschwindigkeit c_0 dadurch definiert, daß während $\mathrm{d}\,t$ eine Masse $\mu_0 \cdot F_0 \cdot c_0 \cdot \mathrm{d}\,t$ von der einen auf die andere Seite der Unstetigkeitsfläche tritt; dies ist aber auch $\mu_{10} \cdot F_0 \cdot (c - v_{10})\,\mathrm{d}\,t = \mu_{20} \cdot F_0 \cdot (c - v_{20})\,\mathrm{d}\,t$. Hiermit wird:

$$\mu_{10}\,(c - v_{10}) = \mu_{20}\,(c - v_{20}) = \mu_0 \cdot c_0 \quad (12),$$

oder mit (11) nach Kürzen mit μ_0:

$$\frac{c - v_{10}}{1 + \varepsilon_{10}} = \frac{c - v_{20}}{1 + \varepsilon_{20}} = c_0 \quad (13).$$

Durch Einsetzen von (12) in (I) uud von (13) in (II) ergibt sich dann:

$$\sigma_{20} - \sigma_{10} = \mu_0 \cdot c_0 \cdot (v_{10} - v_{20}) \quad (14)$$

und

$$v_{20} - v_{10} = c_0\,(\varepsilon_{10} - \varepsilon_{20}) \quad (15).$$

Hieraus:

$$c_0^2 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{\varepsilon_{20} - \varepsilon_{10}} \quad (16).$$

Durch die Sprunggrößen allein ist also in dem behandelten Fall ohne jede Vernachlässigung die allein für den Massentransport von einer Seite der Sprungstelle zur anderen maßgebende Größe c_0 nach Festlegung einer dazugehörigen spezifischen Masse μ_0 gegeben; nicht aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Sprungstelle im Raume.

Gilt das Hookesche Gesetz, so wird mit E als Elastizitätsmodul aus (16):

$$c_0^2 = \frac{E}{\mu_0} \quad (17).$$

Ist der Spannungsdehnungssprung nicht groß und die Kurve $\sigma(\varepsilon)$ nicht stark gekrümmt, so kann oft benutzt werden:

$$c_0^2 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\varepsilon} \quad (18),$$

wobei für den Differentialquotienten rechts ein geeigneter Mittelwert einzusetzen ist.

8. Die üblichen Vernachlässigungen. In dem hier behandelten Beispiel sind nun folgende Vereinfachungen naheliegend und meist zulässig:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{v_{10}}{c} \ll 1; \quad \frac{v_{20}}{c} \ll 1; \quad \varepsilon_{10} \ll 1; \quad \varepsilon_{20} \ll 1; \\ \mu_{10} \approx \mu_{20} \approx \mu_0 = \mu \\ c \approx c_0\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (19).$$

so daß

Hiermit wird aus (I) und (II):

$$\sigma_{20} - \sigma_{10} = \mu\, c\,(v_{10} - v_{20}) \quad \ldots \quad (20),$$

$$v_{10} - v_{20} = c\,(\varepsilon_{20} - \varepsilon_{10}) \quad \ldots \quad (21),$$

also:

$$c^2 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{\varepsilon_{20} - \varepsilon_{10}} \quad \ldots \quad (22),$$

und bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes:

$$c^2 = \frac{E}{\mu} \quad \ldots \quad (23);$$

bei kleinen Spannungssprüngen:

$$c^2 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \ldots \quad (24),$$

wenn die Kurve $\sigma(\varepsilon)$ gekrümmt ist. Dabei ist das Vorzeichen von c durch (20) bzw. (21) festgelegt.

Von diesen letzten Gleichungen soll im folgenden hauptsächlich Gebrauch gemacht werden. Nach ihnen, d. h. mit den durch (19) ausgedrückten Vernachlässigungen, ist c, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Sprungstelle im Raum, eine Materialkonstante, wenn zwischen Spannungen und Dehnungen ein linearer Zusammenhang besteht.

9. Gleichungen für die Geschichte der Sprunggrößen bei Gültigkeit der üblichen Differentialgleichung und bei beliebigem Elastizitätsgesetz. Um jetzt Aussagen über das Verhalten der Sprunggrößen beim Weiterschreiten der Unstetigkeitsstelle zu erhalten, werde auf die Differentialgleichung zurückgegriffen, die innerhalb der beiden stetigen Gebiete gilt und mit den eingeführten Vernachlässigungen (Gl. (9)) jeweils lautet:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial(\sigma_1 \cdot F)}{\partial x} = \mu \cdot F \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial(\sigma_2 F)}{\partial x} = \mu F \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (25).$$

Hierin ist wie üblich ξ die Verschiebung; ferner gilt in beiden Indizes:

$$\left.\begin{array}{c}v = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \\ \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26),$$

so daß

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \ldots \quad (27).$$

Das Elastizitätsgesetz wird noch nicht eingeführt.

Hiermit ergibt sich die Möglichkeit, eine der drei Größen σ, ε, v aus (21) und (22) zu eliminieren, wobei gleichzeitig F als Funktion von x hineingebracht wird.

Dabei ist folgendes zu beachten: In den Gl. (25) bis (27) erscheinen partielle Differentialquotienten der Einzelgrößen; diese existieren mit den betreffenden Differentialquotienten in den beiden stetigen Gebieten bis an die Unstetigkeitsstelle heran.

In den Gl. (21) und (22) kommen aber außer c und μ nur die Sprunggrößen $\sigma_{20} - \sigma_{10}$; $\varepsilon_{20} - \varepsilon_{10}$; $v_{20} - v_{10}$ vor, und diese existieren nur an der Unstetigkeitsstelle; von ihnen gibt es keine partielle Differentialquotienten. Wohl aber haben sie einen Differentialquotienten z. B. nach der Zeit, den man erhält, wenn man mit der Unstetigkeitsstelle fortschreitet und die in den Sprunggrößen auftretenden Änderungen als Funktion der Zeit auffaßt und differenziert; entsprechende Differentialquotienten gibt es auch für die Einzelgrößen in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstelle.

Es soll nun in Übereinstimmung hiermit $D\,y$ diejenige Änderung sein, die eine an der Unstetigkeitsstelle oder in ihrer unmittelbaren Nähe existierende Größe y während der Zeit $D\,t$ erfährt, innerhalb deren die Unstetigkeitsstelle von x_0 nach $x_0 + D\,x_0 = x_0 + c \cdot D\,t$ fort-

schreitet. Dann ist hiermit der für c und die Sprunggrößen existierende Differentialquotient definiert, also:

$$\frac{D}{Dt}(\sigma_{20}-\sigma_{10});\quad \frac{D}{Dt}(v_{10}-v_{20});\quad \frac{D}{Dt}(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10});\quad \frac{Dc}{Dt}.$$

Derselbe Differentialquotient existiert aber auch für die Einzelgrößen an der Sprungstelle, also z. B. $\frac{D\sigma_{20}}{Dt}$; $\frac{D\varepsilon_{10}}{Dt}$ usw. Offenbar ist auch z. B.:

$$\frac{D}{Dt}(\sigma_{20}-\sigma_{10})=\frac{D\sigma_{20}}{Dt}-\frac{D\sigma_{10}}{Dt}, \quad \dots \quad (28)$$

und umgekehrt; für die anderen Größen entsprechend.

Für die Einzelgrößen ist aber:

$$\frac{Dy}{Dt}=\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0+c\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 \quad \dots \quad (29);$$

denn hierdurch wird das Mitschreiten mit der Unstetigkeitsstelle zum Ausdruck gebracht; die partiellen Differentialquotienten sind jeweils in den stetigen Gebieten in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsfläche zu nehmen.

Es ist also erlaubt, für die Sprunggrößen an der Unstetigkeitsstelle den Differentialquotienten D/Dt zu bilden, in diesem nach (28) die Einzelwerte zu trennen, diese nach (29) auszudrücken, sie dann mit Hilfe von (25) bis (27) umzuformen, und schließlich wieder, soweit möglich, unter Berücksichtigung von (29) Werte D/Dt der Einzelgrößen zu bilden und zu entsprechenden Differentialquotienten der Sprunggrößen zusammenfassen.

Dies wird nun durchgeführt. Wir gehen von Gl. (20) aus und erhalten:

$$\frac{1}{\mu}\frac{D}{Dt}(\sigma_{20}-\sigma_{10})=c\frac{D}{Dt}(v_{10}-v_{20})+(v_{10}-v_{20})\cdot\frac{Dc}{Dt} \quad \dots \quad (30).$$

$\frac{Dc}{Dt}$ ergibt sich aus (22); die Einsetzung des Wertes in (30) führt mit einfacher Umformung auf:

$$\frac{D}{Dt}\ln\left[(\sigma_{20}-\sigma_{10})(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10})\right]^{1/2}=\mu\cdot c\cdot\frac{1}{\sigma_{20}-\sigma_{10}}\cdot\frac{D}{Dt}(v_{10}-v_{20}) \quad \dots \quad (31).$$

Nun bilden wir:

$$\frac{D}{Dt}(v_{10}-v_{20})=\frac{Dv_{10}}{Dt}-\frac{Dv_{20}}{Dt}=\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)_0+c\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_0-\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)_0-c\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right);$$

ersetzen hierin $\partial v/\partial t$ durch $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ durch $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$; drücken nach Gl. (25) die zweiten Differentialquotienten nach t durch $F\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\sigma\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ aus und beachten, daß F_0 allein von x_0 abhängig ist, so daß:

$$c\cdot\frac{\mathrm{d}\ln F_0}{\mathrm{d}x}=\frac{D\ln F_0}{Dt} \quad \dots \quad (32).$$

Hiermit wird aus (30) nach Zusammenfassung der beiden Glieder mit $\frac{D\ln F_0}{Dt}$:

$$\frac{D}{Dt}\ln\left(F_0\cdot\left[(\sigma_{20}-\sigma_{10})(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10})\right]^{1/2}\right)=\frac{\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)_0-\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)_0}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}+c\,\frac{\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)_0-\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)_0}{\sigma_{20}-\sigma_{10}} \quad \dots \quad (33).$$

Diese Gleichung läßt sich noch dadurch übersichtlicher machen, daß man auf der rechten Seite durch Addition und Subtraktion entweder von $\frac{c}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}\cdot\left[\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\right)_0-\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x}\right)_0\right]$ oder von $\frac{1}{\sigma_{20}-\sigma_{10}}\cdot\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right)_0-\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right)_0\right]$ die Bildung eines weiteren Differentialquotienten D/Dt entweder von $\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}$ oder von $\sigma_{20}-\sigma_{10}$ ermöglicht, der dann auf die linke Seite gebracht wird. So ergibt sich schließlich das vorläufige Resultat in den zwei gleichwertigen Beziehungen:

$$\frac{D}{D\,t}\ln\left[(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10})\cdot\sqrt{F_0}\cdot\sqrt[4]{\frac{\sigma_{20}-\sigma_{10}}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}}\right]=\frac{c}{2}\left[\frac{\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x}\right)_0-\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\right)_0}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}-\frac{\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)_0-\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)_0}{\sigma_{20}-\sigma_{10}}\right]\quad .\;.\;.\quad (34)$$

und:

$$\frac{D}{D\,t}\ln\left[(\sigma_{20}-\sigma_{10})\cdot\sqrt{F_0}\cdot\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}{\sigma_{20}-\sigma_{10}}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right)_0-\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right)_0}{\sigma_{20}-\sigma_{10}}-\frac{\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)_0-\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)_0}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}\right]\quad .\;.\;.\quad (35).$$

Auf den rechten Seiten ist eine Zusammenfassung der Differentialquotienten der Einzelgrößen zu solchen der Sprunggrößen nicht weiter möglich; auf den linken Seiten stehen dagegen nur die Größen $\sigma_{20}-\sigma_{01}$; $\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}$ und der Querschnitt F_0 an der Unstetigkeitsstelle. Die Zweckmäßigkeit der links gewählten Schreibweise wird sich bei der weiteren Verarbeitung der Beziehungen erweisen.

Man erkennt zunächst: Die Veränderung der Sprunggrößen beim Weiterschreiten der Unstetigkeitsstelle ist bei beliebigem Elastizitätsgesetz im allgemeinen nicht allein von ihnen selbst und dem Querschnittsverlauf, sondern auch von den Vorgängen in den stetigen Gebieten abhängig, aus denen sich die auf der rechten Seite von (34) und (35) stehenden Randwerte ergeben.

Dagegen wird die Geschichte der Sprunggrößen von den Vorgängen in den stetigen Gebieten stets dann unabhängig, wenn die rechte Seite der beiden letzten Beziehungen Null wird. Auf die Bedingungen hierfür gehen wir nunmehr ein.

10. Spezialisierung des Elastizitätsgesetzes, insbesondere Hookesches Gesetz; die maßgebenden Gleichungen für die Sprunggrößen als Hauptergebnis. Wir wählen Gl. (35) als Ausgang und fragen: Wann ist

$$\frac{\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right)_0-\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\right)_0}{\sigma_{20}-\sigma_{10}}-\frac{\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)_0-\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)_0}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}=0\ ?\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (36).$$

Nach Einführung von $\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\sigma'\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$, worin σ' die aus dem Elastizitätsgesetz des Stoffes zu entnehmende Ableitung von σ nach ε bedeutet, wird aus (36) mit einfacher Umformung:

$$\left(\sigma'_{20}-\frac{\sigma_{20}-\sigma_{10}}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)_0-\left(\sigma'_{10}-\frac{\sigma_{20}-\sigma_{10}}{\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)_0=0\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\quad (37).$$

Wir unterscheiden zunächst drei Hauptfälle für das Eintreten von (37).

a) Bei beliebigem Elastizitätsgesetz und beliebiger Größe des Spannungs- und Dehnungssprunges sowie der mittleren Spannung und Dehnung stellt Gl. (37) eine Bedingungsgleichung zwischen $\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)_0$ dar, ist also nur unter ganz speziellen Umständen erfüllt, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

b) Ist der Spannungs- und Dehnungssprung bei beliebigem Elastizitätsgesetz „sehr klein", so sind die beiden Klammerwerte in (37) angenähert Null, so daß dann bei nicht zu hohen Werten von $\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}\right)_0$ Gl. (37) angenähert erfüllt wird. Was „sehr klein" genau bedeutet und wieweit jeweils die Annäherung geht, hängt von der Form der $\sigma(\varepsilon)$-Kurve und den Besonderheiten des betreffenden Falles ab.

Für a) und b) wird aus Gl. (35):

$$(\sigma_{20}-\sigma_{10})\cdot\sqrt{\frac{F_0}{c}}=C_1\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (38),$$

worin C_1 eine durch Anfangswerte oder dergleichen gegebene Konstante.

c) Der wichtigste Fall liegt vor, wenn

$$\sigma'=\text{konst.}\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (39)$$

über den ganzen Spannungs- und Dehnungsbereich, der $\sigma_{20}-\sigma_{10}$ und $\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}$ enthält, wenn also in diesem Bereich mit 2 Konstanten a und b:

$$\sigma=a+b\cdot\varepsilon\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (40),$$

also lineare Abhängigkeit herrscht.

Hiervon wieder liegt der wichtigste Fall vor, wenn $a=0$, also das Hookesche Gesetz

$$\sigma=E\,\varepsilon\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (41)$$

mit $E=$ konst. hinreichend genau erfüllt ist. Dies ist natürlich auch der weitaus wichtigste Fall für die gesamte Anwendung der Theorie.

Unter diesen in der Mehrzahl der Fälle zulässigen oder in vielen anderen Fällen infolge der sonst auftretenden Schwierigkeiten der Bearbeitung gebotenen Voraussetzung ist Gl. (37) immer erfüllt, wie auch die endlichen Werte $\left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}\right)_0$ in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstelle ausfallen mögen.

Da dann auch

$$c = \text{konst.},$$

so erhält man bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes mit einer neuen Konstanten C_2 die bemerkenswerte Beziehung:

$$(\sigma_{20}-\sigma_{10})\cdot\sqrt{F_0}=C_2 \quad \ldots \quad (42).$$

Herrscht also etwa zur Zeit t_0 an der Stelle x_{00}, beim Querschnitt F_{00}, der Spannungssprung $\Delta\sigma_0$, so schreitet dieser mit der Geschwindigkeit $c=\sqrt{\frac{E}{\mu}}$ über den Stab und hat zur Zeit t_1 beim Querschnitt F_{01} an der Stelle $x_{00}+c(t_1-t_0)$ die Größe:

$$\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_0\cdot\sqrt{\frac{F_{00}}{F_{01}}} \quad \ldots \quad (43),$$

ist also bei geometrischer Ähnlichkeit der Querschnitte irgendeiner gleichgelegenen Länge, bei Kreisform also z. B. dem Durchmesser, umgekehrt proportional. Dabei ist der Querschnittsverlauf, wie aus den Ableitungen hervorgeht, nur der einen Beschränkung unterworfen, daß an jeder Stelle $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ eindeutig ist, die Mantellinie im Längsschnitt also ohne Knick verläuft.

Aus (20) ergibt sich mit einer neuen Konstanten C_3 der entsprechende Sprung in der Geschwindigkeit zu:

$$v_{10}-v_{20}=\frac{C_3}{\sqrt{F_0}} \quad \ldots \quad (44),$$

also die gleiche Abhängigkeit von der Stabform wie bei $\sigma_{20}-\sigma_{10}$. Man beachte jedoch die umgekehrte Reihenfolge der Indizes in Gl. (20).

Eine der Hauptaufgaben dieser Mitteilung erscheint hiermit gelöst. Denn es ist evident, daß in solchen Fällen, für die ein unstetiger Vorgang überhaupt als Grenzfall für die Abschätzung der Verhältnisse brauchbar ist, mit der Kenntnis der Veränderung der unstetigen Größen bei beliebigem Querschnittsverlauf schon viel gewonnen ist. Von Sonderfällen abgesehen, wird man annehmen dürfen, daß z. B. die sonst im Stabe auftretenden Spannungen kaum wesentlich größer, sicherlich aber nicht von ganz anderer Größenordnung sein werden, als die an der Unstetigkeitsstelle bei ihrem Fortschreiten vorhandenen.

Einer sinngemäßen Ausdehnung des Resultates auf andere Vorgänge (Torsionsschwingungen, elektrische und akustische Vorgänge u. a.), die von der gleichen oder einer ähnlichen Differentialgleichung erfaßt werden wie das behandelte Problem, steht nichts im Wege.

11. Ein Beispiel zur Veranschaulichung. An einem einfachen Beispiel sei die Anwendung der abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten gezeigt.

Ein Stab der hier behandelten Art bewege sich spannungsfrei mit der für alle Stellen gleichen Geschwindigkeit V in Richtung der positiven x-Achse. Zur Zeit $t=0$ werde der Querschnitt am Stabanfang $x=0$ plötzlich festgehalten.

Man hat offenbar bei $x=0$ zur Zeit $t=0$ einen Geschwindigkeitssprung mit $v_{20}=V$ und $v_{10}=0$; dementsprechend nach Gl. (21) einen Dehnungssprung $\varepsilon_{20}-\varepsilon_{10}=\frac{v_{10}-v_{20}}{c}=-\frac{v_{20}}{c}$, woraus sich mit $\varepsilon_{20}=0$ ergibt: $\varepsilon_{10}=\frac{V}{c}$ und bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes:

$$\sigma_{10_0}=E\cdot\frac{V}{c}=\sqrt{E\cdot\mu}\cdot V \quad \text{für } t=0;\quad x=0.$$

Diese Spannung entsteht also bei $x=0$ unmittelbar nach dem plötzlichen Festhalten dieser Stelle. Die Störung pflanzt sich mit der Geschwindigkeit c im Stabe fort, und die Zugspannung im Augenblick des Durchganges der Unstetigkeitsstelle an der Stelle x_1 mit dem Querschnitt F_{01} beträgt nach Gl. (42) $\sqrt{E\cdot\mu}\cdot V\cdot\sqrt{\frac{F_{00}}{F_{01}}}$, kann also bei starker Verjüngung des Stabes beträchtliche Werte annehmen. Der Geschwindigkeitssprung ist hierbei nach

Gl. (44): $v_{10} - v_{20} = -V \cdot \sqrt{\frac{F_{00}}{F_{01}}}$; also erhält man unmittelbar hinter der Störungsstelle die Geschwindigkeit

$$v_{10_1} = V \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{F_{00}}{F_{01}}}\right).$$

Ist der Stab prismatisch, also $\sqrt{\frac{F_{00}}{F_{01}}} = 1$, so wird $v_{10_1} = 0$; der Stabteil links von der Störungsstelle ist in Ruhe. Bei verjüngtem Stab wird $\sqrt{\frac{F_{00}}{F_{01}}} > 1$, also v_{10_1} negativ; die Stabteilchen werden in diesem Fall beim Durchgang der Störung nicht nur zur Ruhe gebracht, sondern noch nach hinten beschleunigt, entgegengesetzt der Fortschreitungsrichtung der Störungsstelle. Bei mit x zunehmendem Querschnitt bleibt v_{10_1} positiv, aber kleiner als V. Dies gibt bereits ein ganz anschauliches Bild von dem Vorgang während des ersten Zeitabschnittes, innerhalb dessen die Störungsstelle von $x = 0$ nach dem anderen Stabende läuft. Auch das Auftreten der Quadratwurzel in Gl. (43) wird verständlich: Bei verjüngtem Stab z. B. geht die auf dem großen Anfangsquerschnitt ausgelöste große Kraftwirkung (Spannung mal Fläche) beim Fortschreiten auf kleinere Querschnitte über, die Spannung muß also größer werden; gleichzeitig weichen aber wegen des kleinen Querschnittes die verzögerten Massen stark nach der negativen x-Richtung aus, so daß die Spannung nicht reziprok dem Querschnitt, sondern weniger stark ansteigt.

Ist das von außen bisher unbeeinflußte Stabende frei, so daß hier keine äußeren Kräfte auftreten können, so bleibt der Spannungssprung hier bei seinem Eintreffen erhalten; er wandert dann unter Befolgung desselben Gesetzes wieder an die Ausgangsstelle zurück. Inzwischen hat sich aber in einem nicht prismatischen Stab unter dem Einfluß der nach dem ersten Durchgang der Störung zurückbleibenden Dehnungen und Geschwindigkeiten ein anderer Zustand ausgebildet; beim Rücklauf der Störung wissen wir also ohne Integration der Gleichungen für die stetigen Bezirke nichts Bestimmtes über die Einzelgrößen σ_{20}; σ_{10}; ε_{20}; ε_{10}; v_{20}; v_{10}. Die Differenzen bleiben aber entsprechend Gl. (43) und (44) erhalten.

12. Einige wichtige Einzelpunkte. Folgende Einzelheiten erscheinen noch bemerkenswert:

a) Die vereinfachten Gl. (20) und (21) lassen sich anschaulich deuten: Gl. (20) sagt, daß durch die Kraft $\sigma_{20} - \sigma_{10}$ in der Zeiteinheit eine Masse $\mu \cdot c$ von der Geschwindigkeit v_{10} auf v_{20} gebracht wird (Kraft und Masse auf die Flächeneinheit bezogen); Gl. (21) drückt aus, daß in der Zeiteinheit eine Länge c von der Dehnung ε_{20} auf die Dehnung ε_{10} kommt, wobei die entsprechende Verlängerung auch durch die Geschwindigkeitsdifferenz der Endflächen erhalten wird.

Aus derartigen einfachen Erwägungen könnte man die Gleichungen wohl auch direkt hinschreiben; dabei würde aber die Erkenntnis verlorengehen, daß sie nur angenähert gelten.

b) Mit Benutzung der Verschiebungsgröße ξ läßt sich (21) mit (27) leicht umformen zu:

$$\frac{D}{D\,t}(\xi_{20} - \xi_{10}) = 0,$$

also

$$\xi_{20} - \xi_{10} = \text{konst.},$$

wobei die Nullpunkte für die Verschiebungen ξ_{20} und ξ_{10} zweckmäßig so gewählt werden, daß die Konstante Null ist. Gl. (21) drückt also die Tatsache aus, daß der Zusammenhang des Stabes an der Sprungstelle erhalten bleibt, und läßt sich rückwärts hieraus ableiten.

c) Eine einfache Nachrechnung zeigt, daß die Beschleunigung in F_0 im allgemeinen ebenfalls eine Unstetigkeit hat. Doch führt Abwesenheit eines Beschleunigungssprunges nicht immer auf im ganzen stetige Verhältnisse. In dem behandelten Beispiel ist z. B. bei prismatischem Stab die Beschleunigung auf dem ganzen Stab ständig Null, also in F_0 stetig; dabei sind aber die anderen Größen in F_0 unstetig.

d) Man kann nach einem Vorschlag von Herrn L. Cremer die Gl. (42) und (44) miteinander multiplizieren und erhält:

$$(\sigma_{20} - \sigma_{10})(v_{20} - v_{10}) \cdot F_0 = \text{konst.} \qquad (45).$$

So ergibt sich eine Größe von der Dimension einer Leistung, die konstant ist, wobei F_0 in der ersten Potenz auftritt. (45) gibt aber im allgemeinen nicht die an der Unstetigkeitsstelle bei deren Fortschreiten auf das betreffende Massenelement übertragene Leistung. Diese ist vielmehr:

$$L_0 = (\sigma_{20} \cdot v_{20} - \sigma_{10} \cdot v_{10}) \cdot F_0 \qquad (46).$$

Für diesen Leistungswert gilt, wie unmittelbar plausibel und leicht zu verifizieren, der Energiesatz, derart, daß die Arbeit $L_0 \cdot dt$, also die auf das Element von der Länge $l_1 + l_2$ mit $l_1 \to 0$, $l_2 \to 0$, während dt übertragene Arbeit der an ihm angreifenden Spannkräfte, gleich der Erhöhung seiner Energie in derselben Zeit ist, wobei sich diese aus der kinetischen und der Formänderungsenergie der beiden Einzelstücke zusammensetzt. Dabei ist im allgemeinen L_0 nicht konstant.

Dagegen geht (46) dann in (45) über, wenn zwei zusammengehörende Werte von σ und v Null sind. Es werde z. B. in einem ruhenden Stab der Anfangsquerschnitt plötzlich durch eine Druckspannung σ_{100} mit v_{100} in Bewegung gesetzt; jetzt ist beim ersten Wandern der Unstetigkeitsstelle über den Stab $\sigma_{20} = 0$ und $v_{20} = 0$, also nach (45) und (46): $L_0 = \text{konst.}$ Auf weitere Einzelheiten hierüber soll hier nicht eingegangen werden.

13. Der mathematische Sachverhalt. Der mathematische Inhalt der vorstehenden Abschnitte ist mit den Vernachlässigungen nach (19) der folgende:

Bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes in der Form

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

ist die Differentialgleichung des Problems (linear, von 2. Ordnung, hyperbolisch):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + g(x) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{(47).}$$

Hierin ist:

$$g(x) = \frac{d \ln F(x)}{d x} \quad \text{(48),}$$

also:

$$F(x) = F(o) \cdot e^{\int_0^x g(x)\, dx} \quad \text{(49).}$$

Durch die neuen Variablen

$$\left.\begin{aligned} u &= x - c\,t \\ v &= x + c\,t \end{aligned}\right\} \quad \text{(50)}$$

sind dann die sogenannten charakteristischen Grundkurven von (47) gegeben, d. h. im ξ, x, t-Raum die in der $x \cdot t$-Ebene liegenden Querschnittskurven derjenigen Zylinderflächen, auf denen die Charakteristiken liegen; diese selbst ergeben sich erst aus den sonstigen Bedingungen des jeweiligen Problems, über die hier nicht verfügt wird.

Wie sich gezeigt hat, existieren jetzt Lösungen von (47) mit folgenden Eigenschaften:

a) ξ ist im ganzen Bereich stetig, auch auf den Grundkurven $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$, so daß in der hier gewählten Schreibweise

$$\frac{D\,(\xi_{20} - \xi_{10})}{D\,t} = 0 \quad \text{(51).}$$

b) Auf den genannten Grundkurven $u = \text{konst.}$ existieren Unstetigkeiten in den ersten partiellen Differentialquotienten, d. h. in den Neigungswinkeln der Tangentialebenen an die Integralflächen, so daß also:

$$\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t}\right)_0 \neq 0; \quad \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)_0 \neq 0 \quad \text{(52).}$$

c) Als Folge von (51) besteht zwischen den Sprunggrößen folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right)_0 = c \left[\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)_0\right] \quad \text{(53).}$$

d) An der Sprungstelle, also auf $u = \text{konst.}$ (oder $v = \text{konst.}$) besteht die Beziehung:

$$\left[\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)_0\right] \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^x g(x)\, dx} = \text{konst.} \quad \text{(54).}$$

e) Ferner besteht an der Sprungstelle die Beziehung (Energiesatz im mechanischen Problem):

$$\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)_0\right] \cdot \left[c\left(\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)_0\right) - \left(\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right)_0\right)\right] \quad \text{(55).}$$

Stress Systems in an Aeolotropic Rectangular Plate.

By *Hajimu Ôkubo* in Yonezawa (Japan).

Verfasser berechnet die Spannungen in einer dünnen äolotropen, rechteckigen Scheibe konstanter Dicke für den ganz allgemeinen Fall, daß die vier Kanten durch irgendein System von Zug- und Schubkräften beansprucht werden. Er geht so vor, daß er zunächst acht Sonderfälle behandelt, aus denen er dann durch Überlagerung die Lösung für den allgemeinen Fall aufbaut. Diese enthält im Gegensatz zu früher gegebenen Lösungen nur ein einziges System von unendlich vielen Konstanten. Weiter wird, ausgehend von den Formeln für die Spannungen in einer unendlich ausgedehnten Scheibe unter der Wirkung von Einzelkräften, gezeigt, wie man unter Benutzung der gewonnenen Resultate die Spannungen in einer rechteckigen Scheibe berechnen kann, auf die in einzelnen Punkten Kräfte wirken, deren Rand aber spannungsfrei ist.

§ 1. Introduction.

The mathematical treatment of the elastic equilibrium of an aeolotropic body in two dimensions was carried out by K. Wolf[1]) and its further study was developed by the writer[2]). In the preceding paper, the writer introduced the general expression of stress components and as an example gave a solution of stresses in an infinitely long strip whose two edges are acted upon by some systems of tractions.

In the present paper, the stresses and displacements in an aeolotropic rectangular plate are given for the most general case where the four edges are acted upon by any system of tractions. And using the results, the solution is also obtained for the case where isolated forces act at the points within the plate and the edges are free from traction.

From the results of an aeolotropic rectangular plate, is readily deduced a satisfactory solution of an isotropic rectangular plate under the most general boundary conditions cited above by taking the limiting case when k approaches to unity.

The problem of determining the stresses and displacements in an isotropic rectangular strip was attacked by Filon[3]) but the result is not applied without a considerable error except the case where the breadth of the strip is small compared with its length. An attempt to find the solution for an isolated force acting within an infinitely long strip was made by E. Melan[4]) and a more complete solution was given by R. C. J. Howland[5]). The stresses in an isotropic rectangular plate whose two edges are acted upon by symmetrically distributed pressure was calculated by J. Kuno[6]). But the solution obtained by him is not convenient for a numerical calculation since the solution involves four systems of unknown constants which must be determined by solving four systems of infinite determinants. The solution given here involves only one system of unknown constants and is more convenient for a numerical calculation.

§ 2. Fundamental formulas.

We consider an aeolotropic rectangular plate of uniform thickness, and take axis of x and y in a plane parallel to the faces of the plate and place it so that the boundaries of the plate are represented by the lines $x = \pm a$, and $y = \pm b$.

The problem is treated here as one of generalised plane stress, i. e., the stresses and displacements considered are means taken with respect to the thickness of the plate.

The stresses in an aeolotropic body are generally given by[7])

[1]) K. Wolf: Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 249 bis 254.

[2]) H. Ôkubo: Science Reports of the Tôhoku Imperial University (1) 25 (1937), Phil. Mag. April (1939).

[3]) L. N. G. Filon: Phil. Trans., A, Bd. 201 (1903), S. 63.

[4]) E. Melan: Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 314.

[5]) R. C. J. Howland: Roy. Soc. Proc. A, Bd. 124 (1929), S. 89.

[6]) J. Kuno: Phil. Mag. April (1932).

[7]) If we denote the stress function by χ, the differential equation of χ proposed by K. Wolf is

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{k^2 \partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi = 0.$$

The general solution of the differential equation is

$$\chi = \Re[f_1(x + iky) + f_2(x + iy)],$$

where f_1, f_2 are arbitrary functions, and the stress components are given by

$$X_x = -\Re[k^2 f_1''(x + iky) + f_2''(x + iy)],$$
$$Y_y = \Re[f_1''(x + iky) + f_2''(x + iy)],$$
$$X_y = \Im[k f_1''(x + iky) + f_2''(x + iy)].$$

Putting $f_1'' = \varphi_1$, $f_2'' = \varphi_2$, we have the equation (1).

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\Re\,[k^2\varphi_1(x+iky)+\varphi_2(x+iy)], \\ Y_y &= \Re\,[\ \varphi_1(x+iky)+\varphi_2(x+iy)], \\ X_y &= \Im\,[k\ \varphi_1(x+iky)+\varphi_2(x+iy)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (1),$$

where φ_1 and φ_2 are arbitrary functions which are determined to fit given boundary conditions and $\Re$ and $\Im$ denote the real part and the imaginary part divided by i of the complex functions respectively and k is the square root of the ratio of Young's moduli of the x and y directions.

Then the mean displacements u and v are found from

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E}(X_x - \sigma k^2 Y_y), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{k^2}{E}(Y_y - \sigma X_x), \\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1+(1+2\sigma)k^2}{E}X_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (2),$$

where E and σ denote Young's modulus and Poisson's ratio in the x direction respectively.

§ 3. Aeolotropic rectangular plate under peripheral tractions.

We proceed to solve eight special cases from which can be built up the general solution satisfying arbitrary boundary conditions of normal stress and shear. Now put

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x+iky) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{a}(x+iky), \\ \varphi_2(x+iy) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi}{a}(x+iy) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (3).$$

The stress components may be written from (1)

$$\left.\begin{aligned} X'_x &= -k^2\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi k y}{a} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi y}{a}, \\ Y'_y &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi y}{a}, \\ X'_y &= -k\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi k y}{a} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi y}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4),$$

where

$$\mathfrak{Sin}\,x = -i\sin ix, \qquad \mathfrak{Cof}\,x = \cos ix.$$

Case 1. The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned} &X_x = 0, && X_y = 0, \quad \text{when } x = \pm a, \\ &Y_y = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, && X_y = 0, \quad \text{when } y = \pm b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (5).$$

The stresses given by (4) will satisfy the boundary conditions

$$Y'_y = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad X'_y = 0, \quad \text{when } y = \pm b \quad \ldots \ldots (6),$$

if

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{P_n \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi b}{a}}{\operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi b}{a} - k \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi b}{a}}, \\ B_n &= \frac{-k P_n \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi k b}{a}}{\operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi b}{a} - k \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

But they do not satisfy the boundary conditions (5) since

$$X'_x = k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^{n+1} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^{n+1} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi y}{a}, \quad X'_y = 0, \quad \text{when } x = \pm a.$$

X'_x at the boundary $x = \pm a$ is an even function of y, we can put

$$X'_x = -\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (8).$$

Then

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_{nj} P_n \quad (9),$$

where

$$\mathfrak{E}_{nj} = \frac{2(-1)^{n+j} n k \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi b}{a}}{\pi a b \left\{\operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi b}{a} - k \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{n\pi k b}{a} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{n\pi b}{a}\right\}} \left(\frac{k^2}{\frac{n^2 k^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}} - \frac{1}{\frac{n^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}}\right).$$

Next, putting

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x + i k y) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi}{b}\left(\frac{x}{k} + i y\right), \\ \varphi_2(x + i y) &= \sum_{j=1}^{\infty} D_j \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi}{b}(x + i y) \end{aligned}\right\} \quad (10),$$

we have

$$\left.\begin{aligned} X''_x &= -k^2 \sum_{j=1}^{\infty} C_j \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi x}{k b} \cos \frac{j\pi y}{b} - \sum_{j=1}^{\infty} D_j \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{b}, \\ Y''_y &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi x}{k b} \cos \frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi x}{b} \cos \frac{j\pi y}{b}, \\ X'_y &= k \sum_{j=1}^{\infty} C_j \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi x}{k b} \sin \frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

To satisfy the boundary conditions

$$X''_x = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos \frac{j\pi y}{b}, \quad X''_y = 0, \quad \text{when } x = \pm a \quad (12),$$

the arbitrary constants C_j and D_j must be

$$\left.\begin{aligned} C_j &= \frac{Q_j \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi a}{b}}{k\left\{\operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi a}{k b} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi a}{b} - k \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi a}{k b} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi a}{b}\right\}}, \\ D_j &= \frac{-Q_j \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi a}{k b}}{\operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi a}{k b} \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi a}{b} - k \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{j\pi a}{k b} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{j\pi a}{b}} \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

On the edges $y = \pm b$, the shear vanishes, but the normal tension is

$$Y_y'' = \sum_{j=1}^{\infty} C_j (-1)^j \mathfrak{Cof}\, \frac{j \pi x}{k b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j (-1)^j \mathfrak{Cof}\, \frac{j \pi x}{b},$$

which may be expanded in Fourier's cosine series.

$$Y_y'' = \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \frac{m \pi x}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Then

$$R_m = \sum_{j=1}^{\infty} r_{jm}\, Q_j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

where

$$r_{jm} = \frac{2(-1)^{j+m} j\, \mathfrak{Sin}\, \frac{j \pi a}{k b}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{j \pi a}{b}}{\pi a b k^2 \left\{ \mathfrak{Sin}\, \frac{j \pi a}{k b}\, \mathfrak{Cof}\, \frac{j \pi a}{b} - k\, \mathfrak{Cof}\, \frac{j \pi a}{k b}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{j \pi a}{b} \right\}} \left(\frac{1}{\frac{j^2}{k^2 b^2} + \frac{m^2}{a^2}} - \frac{k^2}{\frac{j^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}} \right).$$

The stresses (4) superposed with (11) are

$$\left. \begin{aligned} X_x &= X_x' + X_x'', \\ Y_y &= Y_y' + Y_y'', \\ X_y &= X_y' + X_y'' \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

They satisfy the boundary conditions (5), if

$$P_n + R_n = p_n .$$

Then P_n is determined from the following relation.

$$\left. \begin{aligned} &P_0 = p_0, \\ &P_n + \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{mj}\, r_{jn} = p_n, \qquad n \geqq 1 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Now P_n is known, from the equation (9) Q_j is determined and the stresses (16) are known. The displacements u, v are determined from (2). Then the stresses and displacements in any point of the plate under the boundary conditions (5) are all known.

Case 2. The boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} &X_x = 0, \qquad X_y = 0, && \text{when } x = \pm a, \\ &Y_y = 0, \qquad X_y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n \pi x}{a}, && \text{when } y = b, \\ &Y_y = 0, \qquad X_y = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n \pi x}{a}, && \text{when } y = -b \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

We will take the stress system

$$\left. \begin{aligned} X_x' &= -k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi x}{a}\, \mathfrak{Cof}\, \frac{n \pi k y}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n \pi x}{a}\, \mathfrak{Cof}\, \frac{n \pi y}{a}, \\ Y_y' &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi x}{a}\, \mathfrak{Cof}\, \frac{n \pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n \pi x}{a}\, \mathfrak{Cof}\, \frac{n \pi y}{a}, \\ X_y' &= -k \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi x}{a}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{n \pi k y}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n \pi x}{a}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{n \pi y}{a} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (19).$$

To satisfy the boundary conditions

$$\left.\begin{aligned} Y_y'=0, \quad X_y' &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad \text{when } y=b, \\ Y_y'=0, \quad X_y' &= -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad \text{when } y=-b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (20),$$

the arbitrary constants A_n, B_n are

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{p_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k\operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}, \\ B_n &= \frac{-p_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k\operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (21).$$

On the edges $x=\pm a$, the shear vanishes and the normal tension is

$$X_x' = k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^{n+1} \operatorname{Cof}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^{n+1} \operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a},$$

which is expanded in Fourier's cosine series.

$$X_x' = -\sum_{j=0}^{\infty} Q_j \cos\frac{j\pi y}{b} \quad \ldots \ldots (22),$$

where

$$Q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a \left\{k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a} - \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\right\}}{n\pi b \left\{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k\operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}\right\}},$$

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+j} n p_n}{\pi a b \left\{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k\operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}\right\}}$$

$$\left(\frac{k^3 \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}{\frac{n^2 k^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}} - \frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}}{\frac{n^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}\right), \qquad j \geq 1.$$

By a similar way as Case 1, if we find the stress system X_x'', Y_y'', X_y'' which satisfies the following boundary conditions

$$\left.\begin{aligned} X_x'' &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_j \cos\frac{j\pi y}{b}, \qquad X_y''=0, \qquad \text{when } x=\pm a, \\ Y_y'' &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad X_y''=0, \qquad \text{when } y=\pm b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (23),$$

and superpose it to (19), we can find the stress system which satisfies the boundary conditions (18).

Nextly, we will put

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x+iky) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}(x+iy), \\ \varphi_2(x+iy) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}(x+iy) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (24).$$

From the equation (1), we have

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= -k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi k y}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a}, \\ Y_y' &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a}, \\ X_y' &= k \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a} \end{aligned}\right\} \quad (25).$$

Case 3. The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 0, & X_y &= 0, & \text{when } x = \pm a, \\ Y_y &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, & X_y &= 0, & \text{when } y = \pm b \end{aligned}\right\} \quad (26).$$

The stresses given by (25) will satisfy the boundary conditions

$$Y_y' = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad X_y' = 0, \quad \text{when } y = \pm b \quad (27),$$

if

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{P_n \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}, \\ B_n &= \frac{-k P_n \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

On the edges $x = \pm a$, the normal tension vanishes and the shear is

$$X_y' = k \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a},$$

which may be put

$$X_y' = -\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b} \quad (29),$$

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_{nj} P_n \quad (30),$$

where

$$\mathfrak{E}_{nj} = \frac{2(-1)^{n+j} j k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}}{\pi b^2 \left\{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - k\operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}\right\}} \left(\frac{1}{\frac{n^2k^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}} - \frac{1}{\frac{n^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}\right).$$

Next, putting

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x+iky) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \operatorname{Sin}\frac{j\pi}{b}\left(\frac{x}{k}+iy\right), \\ \varphi_2(x+iy) &= \sum_{j=1}^{\infty} D_j \operatorname{Sin}\frac{j\pi}{b}(x+iy) \end{aligned}\right\} \quad (31),$$

we have

$$\left.\begin{aligned}
X_x'' &= -k^2 \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{kb}\cos\frac{j\pi y}{b} - \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{b}\cos\frac{j\pi y}{b},\\
Y_y'' &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{kb}\cos\frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{b}\cos\frac{j\pi y}{b},\\
X_y'' &= k \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathfrak{Cos}\frac{j\pi x}{kb}\sin\frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathfrak{Cos}\frac{j\pi x}{b}\cos\frac{j\pi y}{b}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (32).$$

On the edges $x = \pm a$, the normal tension vanishes and the shear is expressed in the form $X_y'' = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b}$, if

$$\left.\begin{aligned}
C_j &= \frac{Q_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{b}}{k\left\{\mathfrak{Cos}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{b} - k\,\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Cos}\frac{j\pi a}{b}\right\}},\\
D_j &= \frac{-Q_j k \mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{kb}}{\mathfrak{Cos}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{b} - k\,\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Cos}\frac{j\pi a}{b}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (33).$$

On the edges $y = \pm b$, the shear vanishes and the normal tension is

$$Y_y'' = \sum_{j=1}^{\infty} C_j (-1)^j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{kb} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j (-1)^j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{b},$$

which is expressed in the form

$$Y_y'' = \sum_{m=1}^{\infty} R_m \sin\frac{m\pi x}{a} \quad \ldots\ldots (34),$$

provided with

$$R_m = \sum_{j=1}^{\infty} r_{jm} Q_j \quad \ldots\ldots (35),$$

where

$$r_{jm} = \frac{2(-1)^{j+m+1} m\, \mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{b}}{\pi a^2 k\left\{\mathfrak{Cos}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{b} - k\,\mathfrak{Sin}\frac{j\pi a}{kb}\mathfrak{Cos}\frac{j\pi a}{b}\right\}}\left(\frac{1}{\frac{j^2}{k^2 b^2}+\frac{m^2}{a^2}} - \frac{k^2}{\frac{j^2}{b^2}+\frac{m^2}{a^2}}\right).$$

If we determine P_n from the following equation

$$P_n + \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{mj}\, r_{jn} = p_n \quad \ldots\ldots (36),$$

then the stress system (25) combined with (32) satisfies the boundary conditions (26).

Case 4. The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned}
&X_x = 0,\ X_y = 0, && \text{when } x = \pm a,\\
&Y_y = 0,\ X_y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, && \text{when } y = b,\\
&Y_y = 0,\ X_y = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, && \text{when } y = -b
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37).$$

The stresses (25) satisfy the following boundary conditions

$$\left.\begin{array}{ll} Y'_y=0,\ X'_y=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, & \text{when } y=b, \\ Y'_y=0,\ X'_y=-\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, & \text{when } y=-b \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (38),$$

if the arbitrary constants are determined as

$$\left.\begin{array}{l} A_n=\dfrac{p_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}{k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}-\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}}, \\ B_n=\dfrac{-p_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}}{k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}-\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (39).$$

On the edges $x=\pm a$, the normal tension vanishes and the shear is

$$X'_y=k\sum_{n=1}^{\infty} A_n(-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi k y}{a}+\sum_{n=1}^{\infty} B_n(-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a},$$

which is expressed in Fourier's sine series

$$X'_y=-\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b} \quad \ldots \ldots (40),$$

where

$$Q_j=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+j} j\, p_n}{\pi b^2\left\{k \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}-\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}\right\}}\left(\frac{k\operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}}{\frac{n^2 k^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}-\frac{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}}{\frac{n^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}\right).$$

By a similar way as employed in Case 8, if we find the stress system satisfying the boundary conditions

$$\left.\begin{array}{ll} X''_x=0,\ X''_y=\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b}, & \text{when } x=\pm a, \\ Y''_y=0,\ X''_y=0, & \text{when } y=\pm b \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (41)$$

and superpose it to the stress system (25) combined with (39), we can obtain the stress system which satisfies the boundary conditions (37).

We will find another type of stress system by putting

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x+iky)=i\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{a}(x+iky), \\ \varphi_2(x+iy)\ =i\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi}{a}(x+iy) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (42).$$

The stresses are

$$\left.\begin{aligned}
X'_x &= -k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi k y}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi y}{a},\\
Y'_y &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{n\pi y}{a},\\
X'_y &= k \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (43).$$

Case 5. The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= 0, & X_y &= 0, \quad \text{when } x = \pm a,\\
Y_y &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, & X'_y &= 0, \quad \text{when } y = b,\\
Y_y &= -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, & X'_y &= 0, \quad \text{when } y = -b
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (44).$$

The stresses (43) satisfy the boundary conditions

$$\left.\begin{aligned}
Y'_y &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, & X'_y &= 0, \quad \text{when } y = b,\\
Y'_y &= -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, & X'_y &= 0, \quad \text{when } y = -b
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (45),$$

if

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= \frac{p_n \,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi b}{a}}{\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi b}{a} - k\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi b}{a}},\\
B_n &= \frac{-p_n k\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi k b}{a}}{\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi b}{a} - k\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi b}{a}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (46).$$

When $x = \pm a$, the normal tension vanishes but the shear is

$$X'_y = k \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a},$$

which is

$$X'_y = -\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos\frac{j\pi y}{b} \quad \ldots \quad (47),$$

where

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+j+1} k n p_n}{\pi a b\left\{\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi b}{a} - k\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi b}{a}\right\}} \left(\frac{k\,\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi b}{a}}{\dfrac{n^2 k^2}{a^2} + \dfrac{j^2}{b^2}} - \frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{n\pi b}{a}\,\mathfrak{Cof}\dfrac{n\pi k b}{a}}{\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{j^2}{b^2}}\right).$$

If we find a stress system by a similar way as employed in the next case satisfying the boundary conditions

$$\left.\begin{aligned} X_x'' = 0,\ X_y'' = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos\frac{j\pi y}{b},\ \text{when } x = \pm a, \\ Y_y'' = 0,\ X_y'' = 0,\qquad \text{when } y = \pm b \end{aligned}\right\} \quad (48),$$

and superpose it to (43), we have a stress system which satisfies the boundary conditions (44).

Case 6. The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned} X_x = 0,\ X_y = 0,\qquad \text{when } x = \pm a, \\ Y_y = 0,\ X_y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a},\ \text{when } y = \pm b \end{aligned}\right\} \quad (49).$$

The stresses given by (43) satisfy the following boundary conditions

$$Y_y' = 0,\quad X_y' = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos\frac{n\pi x}{a},\quad \text{when } y = \pm b \quad (50),$$

if

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{P_n \mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{a}}{k\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{a} - \mathfrak{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Cof}\frac{n\pi b}{a}}, \\ B_n &= \frac{-P_n \mathfrak{Sin}\frac{n\pi k b}{a}}{k\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{a} - \mathfrak{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Cof}\frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad (51).$$

The normal tension vanishes on the edges $x = \pm a$, but the shear is

$$X_y' = k\sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi y}{a},$$

which is expressed in the form

$$X_x' = -\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos\frac{j\pi y}{b} \quad (52),$$

then

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{nj} P_n \quad (53),$$

where

$$\mathfrak{C}_{nj} = \frac{2(-1)^{n+j+1}\, n\, \mathfrak{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{a}}{\pi a b\left\{k\,\mathfrak{Cof}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Sin}\frac{n\pi b}{a} - \mathfrak{Sin}\frac{n\pi k b}{a}\mathfrak{Cof}\frac{n\pi b}{a}\right\}}\left(\frac{k^2}{\frac{n^2 k^2}{a} + \frac{j^2}{b^2}} - \frac{1}{\frac{n^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}}\right).$$

Next, putting

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x + iky) &= i\sum_{j=1}^{\infty} C_j\,\mathfrak{Cof}\frac{j\pi}{b}\left(\frac{x}{k} + iy\right), \\ \varphi_2(x + iy) &= i\sum_{j=1}^{\infty} D_j\,\mathfrak{Cof}\frac{j\pi}{b}(x + iy) \end{aligned}\right\} \quad (54),$$

we have

$$\left.\begin{aligned} X_x'' &= k^2 \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{k b}\sin\frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{b}\sin\frac{j\pi y}{b},\\ Y_y'' &= -\sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{k b}\sin\frac{j\pi y}{b} - \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathfrak{Sin}\frac{j\pi x}{b}\sin\frac{j\pi y}{b},\\ X_y'' &= k \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathfrak{Cof}\frac{j\pi x}{k b}\cos\frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j \mathfrak{Cof}\frac{j\pi x}{b}\cos\frac{j\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (55).$$

To satisfy the boundary conditions

$$X_x'' = 0, \quad X_y'' = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \cos\frac{j\pi y}{b}, \quad \text{when } x = \pm a \quad \ldots \ldots (56),$$

the constants C_j and D_j must be

$$\left.\begin{aligned} C_j &= \frac{Q_j \mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{b}}{k\left\{\mathfrak{Cof}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{b} - k\,\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Cof}\dfrac{j\pi a}{b}\right\}},\\ D_j &= \frac{-k\,Q_j \mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{k b}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{b} - k\,\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Cof}\dfrac{j\pi a}{b}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (57).$$

On the edges $y = \pm b$, the normal tension vanishes and shear is

$$X_y'' = k \sum_{j=1}^{\infty} C_j (-1)^j \mathfrak{Cof}\frac{j\pi x}{k b} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j (-1)^j \mathfrak{Cof}\frac{j\pi x}{b},$$

which is

$$X_y'' = \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos\frac{m\pi x}{a} \quad \ldots \ldots (58),$$

and

$$R_m = \sum_{j=1}^{\infty} r_{jm} Q_j \quad \ldots \ldots (59),$$

where

$$r_{jm} = \frac{2(-1)^{j+m} j\,\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{b}}{\pi a b k\left\{\mathfrak{Cof}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{b} - k\,\mathfrak{Sin}\dfrac{j\pi a}{k b}\mathfrak{Cof}\dfrac{j\pi a}{b}\right\}}\left(\frac{1}{\dfrac{j^2}{k^2 b^2} + \dfrac{m^2}{a^2}} - \frac{1}{\dfrac{j^2}{b^2} + \dfrac{m^2}{a^2}}\right).$$

The stress system (43) combined with (55) satisfies the boundary conditions (49), if

$$P_n + \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{E}_{mj} r_{jn} = p_n \quad \ldots \ldots (60).$$

Lastly, we will put

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x + i k y) &= i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}(x + i k y),\\ \varphi_2(x + i y) &= i \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}(x + i y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (61).$$

The corresponding stresses are

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a}, \\ Y_y' &= -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi k y}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a}, \\ X_y' &= k \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi y}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (62).$$

Case 7. The boundary conditions are

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 0, & X_y &= 0, \text{ when } x = \pm a, \\ Y_y &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, & X_y &= 0, \text{ when } y = b, \\ Y_y &= -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, & X_y &= 0, \text{ when } y = -b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (63).$$

The stress system (62) satisfies the boundary conditions

$$\left.\begin{aligned} Y_y' &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, & X_y' &= 0, \text{ when } y = b, \\ Y_y' &= -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\frac{n\pi x}{a}, & X_y' &= 0, \text{ when } y = -b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (64),$$

if

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{p_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}{k \operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}}, \\ B_n &= \frac{-k\, p_n \operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a}}{k \operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (65).$$

On the edges $x = \pm a$, the shear vanishes and the normal tension is

$$X_x' = k^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{a},$$

which is

$$X_x' = -\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66),$$

where

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+j} k j p_n}{\pi b^2 \left\{k \operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a} - \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a}\right\}} \left(\frac{k \operatorname{Cof}\frac{n\pi b}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi k b}{a}}{\frac{n^2 k^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}} - \frac{\operatorname{Cof}\frac{n\pi k b}{a} \operatorname{Sin}\frac{n\pi b}{a}}{\frac{n^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}} \right).$$

The stresses which satisfy the following boundary conditions

$$\left.\begin{array}{lll} X_x'' = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b}, & X_y'' = 0, & \text{when } x = \pm a, \\ Y_y'' = 0, & X_y'' = 0, & \text{when } y = \pm b \end{array}\right\} \quad (67),$$

are found by a similar way as Case 3. If we superpose them to the stresses given by (62), we can find a stress system which satisfies the boundary conditions (63).

Case 8. The boundary conditions are

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = 0, & X_y = 0, & \text{when } x = \pm a, \\ Y_y = 0, & X_y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, & \text{when } y = \pm b \end{array}\right\} \quad (68).$$

The stresses (62) satisfy the boundary conditions

$$Y_y' = 0, \quad X_y' = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad \text{when } y = \pm b \quad (69)$$

if

$$\left.\begin{array}{l} A_n = \dfrac{p_n \,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi b}{a}}{k\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi b}{a} - \mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{n\pi b}{a}}, \\ B_n = \dfrac{-p_n \,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi k b}{a}}{k\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi b}{a} - \mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{n\pi b}{a}} \end{array}\right\} \quad (70).$$

On the edges $x = \pm a$, the shear vanishes and the normal tension is

$$X_x' = k^3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n \,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi k y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi y}{a},$$

which is

$$X_x' = -\sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin\frac{j\pi y}{b} \quad (71),$$

where

$$Q_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+j} j\, p_n \,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi b}{a}}{\pi b^2 \left\{k\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi b}{a} - \mathfrak{Sin}\,\dfrac{n\pi k b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\dfrac{n\pi b}{a}\right\}} \left(\frac{k^2}{\dfrac{n^2 k^2}{a^2} + \dfrac{j^2}{b^2}} - \frac{1}{\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{j^2}{b^2}}\right).$$

By the same way as Case 7, if we find a stress system satisfying the boundary conditions (67), and superposing it to the stress system (62) combined with (70), we can find the stress system which satisfies the boundary conditions (68).

§ 4. Solution under general peripheral tractions.

Firstly, we will assume that the upper and lower edges of the plate are acted upon by any distributions of normal force and shear, while the lateral edges are free from tractions. The boundary conditions of the case are

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}Y_y=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a},\\ X_y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{a},\end{array}\right\}\text{when } y=b,\\ \left.\begin{array}{l}Y_y=\sum_{n=0}^{\infty} A'_n \cos\frac{n\pi x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin\frac{n\pi x}{a},\\ X_y=\sum_{n=0}^{\infty} C'_n \cos\frac{n\pi x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty} D'_n \sin\frac{n\pi x}{a},\end{array}\right\}\text{when } y=-b\end{array}\right\} \quad . \quad (72),$$

which is readily transformed into

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}Y_y=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(A_n+A'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(A_n-A'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}\\ \quad +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n+B'_n)\sin\frac{n\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n-B'_n)\sin\frac{n\pi x}{a},\\ X_y=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(C_n+C'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(C_n-C'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}\\ \quad +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(D_n+D'_n)\sin\frac{n\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(D_n-D'_n)\sin\frac{n\pi x}{a},\end{array}\right\}\text{when } y=b,\\ \left.\begin{array}{l}Y_y=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(A_n+A'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(A_n-A'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}\\ \quad +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n+B'_n)\sin\frac{n\pi x}{a}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n-B'_n)\sin\frac{n\pi x}{a},\\ X_y=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(C_n+C'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(C_n-C'_n)\cos\frac{n\pi x}{a}\\ \quad +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(D_n+D'_n)\sin\frac{n\pi x}{a}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(D_n-D'_n)\sin\frac{n\pi x}{a},\end{array}\right\}\text{when } y=-b\end{array}\right\} \quad . \quad (73).$$

Hence the boundary condition (72) is the combination of eight boundary conditions (5), (18), (26), (37), (44), (49), (63) and (68). The stress system which is built up by adding the solutions of the eight cases is the solution satisfying the boundary condition (72). By a similar way, if we find a solution of the case where the upper and lower edges of the plate are free from tractions and the lateral edges are acted upon by any distribution of normal force and shear, and adding both solutions together, we can find the solution under general peripheral tractions. In the boundary condition (72), the terms of C_0 and C'_0 must be equal since the peripheral tractions of the plate are in equilibrium. But when the plate is under the peripheral tractions acting on the four edges, the tractions on opposite edges need not be in equilibrium respectively, if only the resultant is in equilibrium.

§ 5. Forces operate within the plate.

We will firstly find the stresses in a plate unbounded in all directions corresponding to an isolated force P which acts at the origin in the positive direction of x.

Now, putting

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x+iky) &= A(x+iky)^{-1}, \\ \varphi_2(x+iy) &= B(x+iy)^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (74)$$

we have

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{A k^2 x}{x^2+k^2 y^2} - \frac{B x}{x^2+y^2}, \\ Y_y &= \frac{A x}{x^2+k^2 y^2} + \frac{B x}{x^2+y^2}, \\ X_y &= -\frac{A k^2 y}{x^2+k^2 y^2} - \frac{B y}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (75).$$

The resultant of the tractions is found by adding the stresses on the cavity bounded by a circle with its centre at the origin, since the resultant is independent of the shape of the cavity. The equation (75) shows that the component of the resultant in the direction of y vanishes, and the moment of the tractions about the centre of cavity also vanishes, and the component in the direction of x is $2\pi(kA+B)$.

Hence we have

$$2\pi(kA+B) = P \quad \ldots \ldots \quad (76).$$

To make the displacement v one-valued

$$(1+\sigma k^2)A + (1+\sigma)kB = 0 \quad \ldots \ldots \quad (77),$$

then, we have

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P k(1+\sigma)}{2\pi(k^2-1)}, \\ B &= -\frac{P(1+\sigma k^2)}{2\pi(k^2-1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (78).$$

Similarly, when an isolated force Q acts in the positive direction of y, the corresponding stresses are

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{A' k^3 y}{x^2+k^2 y^2} - \frac{B' y}{x^2+y^2}, \\ Y_y &= \frac{A' k y}{x^2+k^2 y^2} + \frac{B' y}{x^2+y^2}, \\ X_y &= \frac{A' k x}{x^2+k^2 y^2} + \frac{B' x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (79),$$

where

$$A' = \frac{Q(1+\sigma k^2)}{2\pi(k^2-1)}, \qquad B' = -\frac{Q k^2(1+\sigma)}{2\pi(k^2-1)}.$$

When several forces act at the points within the plate and are in equilibrium, and the force (P_i, Q_i) acts at the point (x_i, y_i), the corresponding stresses in the plate are

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\sum_i \left\{\frac{k^2(A_i x_i' + k A_i' y_i')}{x_i'^2 + k^2 y_i'^2} + \frac{B_i x_i' + B_i' y_i'}{x_i'^2 + y_i'^2}\right\}, \\ Y_y &= \sum_i \left\{\frac{A_i x_i' + k A_i' y_i'}{x_i'^2 + k^2 y_i'^2} + \frac{B_i x_i' + B_i' y_i'}{x_i'^2 + y_i^2}\right\}, \\ X_y &= -\sum_i \left\{\frac{k(A_i k y_i - A_i' x_i')}{x_i'^2 + k^2 y_i'^2} + \frac{B_i y_i' - B_i' x_i'}{x_i'^2 + y_i'^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (80),$$

where

$$x_i' = x - x_i, \qquad y_i = y - y_i, \qquad A_i = \frac{P_i k(1+\sigma)}{2\pi(k^2-1)},$$

$$B_i = -\frac{P_i(1+\sigma k^2)}{2\pi(k^2-1)}, \qquad A_i = \frac{Q_i(1+\sigma k^2)}{2\pi(k^2-1)}, \qquad B_i' = -\frac{Q_i k^2(1+\sigma)}{2\pi(k^2-1)}.$$

If we find the stress system, by the way explained in § 4, in a rectangular plate under the peripheral tractions, which are equal and opposite with the stresses (80) on the edges of the plate, and superposing it to the stress system (80), we can find the stresses in the plate which is acted upon by forces within the plate but is free from tractions on all edges.

In conclusion the writer wishes to express his hearty thanks to Prof. Iwao Kobayashi and to Prof. Seiichi Higuchi of the Tôhoku Imperial University for their kind guidance in this study.

216

Über unvollständige Anger-Webersche Funktionen[1]).

Von *Peter* und *Elfriede Brauer* in München.

(Aus den Physikalischen Instituten der Techn. Hochschule München und der Bergakademie Freiberg i. Sa.)

Die unvollständigen Angerschen und Weberschen Funktionen werden durch ihre Integraldarstellung eingeführt. Eine Reihendarstellung wird für sie gegeben. Für einen wichtigen Sonderfall werden Tafeln im Intervall $0 \leqq \sigma \leqq \pi$ berechnet, die sich aber — wie abschließend gezeigt wird — mit Hilfe einfacher Formeln auch bei beliebigem reellen Argument verwenden lassen.

1. Einleitung. Versucht man die durch ihre natürliche Gleichung[2]) [3])

$$K = r(\cos p\,\sigma - 1) \quad \ldots \quad (1)$$

bestimmte Kurve in rechtwinkligen Koordinaten u und v darzustellen, so ergibt sich folgende Parameterdarstellung

$$u = \int_0^\sigma \cos(r\sin\sigma - p\,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \ldots \quad (2\,\mathrm{a}),$$

$$v = \int_0^\sigma \sin(r\sin\sigma - p\,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \ldots \quad (2\,\mathrm{b}).$$

Setzt man in den Integralen für die obere Grenze $\sigma = \pi$ ein, so bemerkt man, daß man — bis auf den fehlenden Faktor $\frac{1}{\pi}$ — im Falle (2a) die Angersche Funktion $J_p(r)$ und im Falle (2b) bis auf den Faktor $-\frac{1}{\pi}$ die Webersche Funktion $\mathfrak{E}_p(r)$ vor sich hat[4]). Bekanntlich gehen ihrerseits die Angerschen Funktionen für ganzzahliges p in Besselsche Funktionen über. — Wir wollen in (2) setzen $u = u_p^r(\sigma)$ und $v = v_p^r(\sigma)$. Es gilt also

$$u_p^r(\pi) = \pi\,J_p(r) \quad \ldots \quad (3\,\mathrm{a}),$$

und

$$v_p^r(\pi) = -\pi\,\mathfrak{E}_p(r) \quad \ldots \quad (3\,\mathrm{b}).$$

2. Reihenentwicklung. Wir wollen für die Funktionen (2) Reihenentwicklungen angeben. Wir erläutern unser Vorgehen an der Funktion u. Es ist

$$u = \int_0^\sigma \cos(r\sin\sigma - p\,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^\sigma \cos(r\sin\sigma)\cos p\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^\sigma \sin(r\sin\sigma)\sin p\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma.$$

Hierin lassen sich $\cos(r\sin\sigma)$ und $\sin(r\sin\sigma)$ nach Jacobi in Fouriersche Reihen entwickeln:

$$\cos(r\sin\sigma) = J_0(r) + 2\sum_1^\infty{}^n J_{2n}(r)\cos 2n\,\sigma$$

$$\sin(r\sin\sigma) = 2\sum_0^\infty{}^n J_{2n+1}(r)\sin(2n+1)\,\sigma.$$

Da diese im Intervall $0 \leqq \sigma \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergieren, tun es auch diejenigen Reihen, die aus ihnen durch gliedweise Multiplikation mit dem konstanten, d. h. von n unabhängigen Faktor $\cos p\,\sigma$ bzw. $\sin p\,\sigma$ hervorgehen. Wir können also gliedweise integrieren:

$$u = J_0(r)\int_0^\sigma \cos p\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma + 2\sum_1^\infty{}^n J_{2n}(r)\int_0^\sigma \cos 2n\,\sigma\cos p\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma$$
$$+ 2\sum_0^\infty{}^n J_{2n+1}(r)\int_0^\sigma \sin(2n+1)\,\sigma\sin p\,\sigma\,\mathrm{d}\sigma.$$

---

[1]) Bezeichnung nach Vorschlag von Herrn Prof. Fritz Emde.

[2]) Es bedeutet K die Krümmung, σ die Bogenlänge der Kurve, p und r Konstante.

[3]) Diese Gleichung trat bei Verfolgung einer technischen Aufgabe auf. Siehe hierzu P. Brauer, Straße Bd. 7 (1940), S. 352 bis 357. Die Behandlung der Aufgabe, bessere Übergangsbögen im Straßenbau auf Grund kinematischer Überlegungen anzustreben, wurde von Wa. Ostwald (Straße Bd. 7 (1940), S. 144 bis 145) angeregt.

[4]) Siehe z. B. R. Weyrich: Zylinderfunktionen, Leipzig 1937, S. 87 oder C. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 308.

Die Integrale können nach Teilen integriert werden, so daß wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{p} J_0(r) \sin p\sigma + 2 \sum_1^\infty {}^n J_{2n}(r) \frac{2n}{(2n)^2 - p^2}\left(\sin 2n\sigma \cos p\sigma - \frac{p}{2n}\cos 2n\sigma \sin p\sigma\right) \\ &+ 2 \sum_0^\infty {}^n J_{2n+1}(r) \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - p^2}\left(-\cos(2n+1)\sigma \sin p\sigma + \frac{p}{2n+1}\sin(2n+1)\sigma\cos p\sigma\right) \end{aligned}\right\} \quad (4\,\mathrm{a}).$$

In analoger Weise ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} v &= -\frac{1}{p} J_0(r)(1-\cos p\sigma) - 2 \sum_1^\infty {}^n J_{2n}(r) \frac{2n}{(2n)^2 - p^2}\left(\sin p\sigma \sin 2n\sigma + \frac{p}{2n}[1-\cos p\sigma \cos 2n\sigma]\right) \\ &- 2 \sum_0^\infty {}^n J_{2n+1}(r) \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - p^2}\left(-[1-\cos(2n+1)\sigma\cos p\sigma] + \frac{p}{2n+1}\sin(2n+1)\sigma\sin p\sigma\right) \end{aligned}\right\} \quad (4\,\mathrm{b}).$$

Setzen wir hierin $\sigma = \pi$, so erhalten wir

$$u(\pi) = \frac{\sin p\pi}{p}\left\{J_0(r) - 2\sum_1^\infty {}^n \frac{p^2}{(2n)^2 - p^2} J_{2n}(r)\right\} + \sin p\pi \left\{2\sum_0^\infty {}^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - p^2} J_{2n+1}(r)\right\} \quad . \quad . \quad (5\,\mathrm{a}),$$

$$v(\pi) = \frac{1-\cos p\pi}{p}\left\{-J_0(r) + 2\sum_1^\infty {}^n \frac{p^2}{(2n)^2 - p^2} J_{2n}(r)\right\} + (1+\cos p\pi)\left\{2\sum_0^\infty {}^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - p^2} J_{2n+1}(r)\right\} \quad (5\,\mathrm{b}).$$

Diese Reihen müssen nach (3) mit den Weberschen Reihen[5]) für πJ_p bzw. $-\pi \mathfrak{E}_p$

$$\left.\begin{aligned} \pi J_p(r) &= \frac{\sin p\pi}{p}\left\{1 - \frac{r^2}{2^2 - p^2} + \frac{r^4}{(2^2-p^2)(4^2-p^2)} - \frac{r^6}{(2^2-p^2)(4^2-p^2)(6^2-p^2)} \pm \cdots\right\} \\ &+ \sin p\pi \left\{\frac{r}{1^2 - p^2} - \frac{r^3}{(1^2-p^2)(3^2-p^2)} + \frac{r^5}{(1^2-p^2)(3^2-p^2)(5^2-p^2)} \mp \cdots\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6\,\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} -\pi \mathfrak{E}_p(r) &= -\frac{1-\cos p\pi}{p}\left\{1 - \frac{r^2}{2^2 - p^2} + \frac{r^4}{(2^2-p^2)(4^2-p^2)} - \frac{r^6}{(2^2-p^2)(4^2-p^2)(6^2-p^2)} \pm \cdots\right\} \\ &+ (1+\cos p\pi) \left\{\frac{r}{1^2 - p^2} - \frac{r^3}{(1^2-p^2)(3^2-p^2)} + \frac{r^5}{(1^2-p^2)(3^2-p^2)(5^2-p^2)} \mp \cdots\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6\,\mathrm{b})$$

übereinstimmen. Zum Beweise setzen wir in (5) für J die zugehörige Potenzreihe

$$J_n(r) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} r\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}$$

ein und ordnen die Summenglieder in (5) innerhalb einer Klammer dann nach Potenzen von r. Dabei ergeben sich die Glieder mit r^μ (unter Weglassung des in (5) vor der Klammer stehenden Faktors $-\frac{\sin p\pi}{p}$ bzw. $-\frac{1-\cos p\pi}{p}$) zu

$$r^\mu p^2 \left[\frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^\mu}{p^2 \left(\frac{\mu}{2}\right)!\left(\frac{\mu}{2}\right)!} - 2 \sum_{n=1}^{\frac{\mu}{2}} \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2} - n}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu}{((2n)^2 - p^2)\left(\frac{\mu}{2} - n\right)!\left(\frac{\mu}{2} + n\right)!}\right],$$

wenn $\mu = 2m + 2n$ gerade ist. Ist $\mu = 2m + (2n+1)$ ungerade, so haben wir (unter Weglassung des Faktors $\sin p\pi$ bzw. $(1 + \cos p\pi)$)

$$r^\mu \left[2 \sum_{n=0}^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}[\mu - (2n+1)]}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^\mu}{((2n+1)^2 - p^2)\left(\frac{1}{2}[\mu - (2n+1)]\right)!\left(\frac{1}{2}[\mu + (2n+1)]\right)!}\right].$$

---

[5]) H. F. Weber: Ann. Phys. (III) Bd. 8 (1879), S. 407 bis S. 444 siehe S. 419 und S. 420.

Diese Ausdrücke stellen aber die Partialbruchzerlegungen der entsprechenden Glieder in (6)

$$r^{\mu} \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{(2^2 - p^2)(4^2 - p^2) \cdots\cdots (\mu^2 - p^2)} \quad (\mu \text{ gerade})$$

bzw.

$$r^{\mu} \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1^2 - p^2)(3^2 - p^2) \cdots\cdots (\mu^2 - p^2)} \quad (\mu \text{ ungerade})$$

dar, wie man durch eine kleine Rechnung zeigen kann.

In ähnlicher Weise kann man versuchen, die Reihen (4) für Bruchteile von π zu berechnen, doch erhält man keine so einfachen zur numerischen Rechnung geeigneten Ausdrücke.

3. Tafel. Setzt man besonders $p = r$, so erhält man den für die Anwendungen wichtigen Fall, bei dem die Anfangskrümmung der Kurve, deren rechtwinklige Koordinaten u und v sind, verschwindet. p hat dann die Bedeutung des mit $-\frac{1}{\pi}$ multiplizierten Winkels zwischen den Kurventangenten in den Punkten $\sigma = 0$ und $\sigma = \pi$[6]). Für diesen wichtigen Fall wird die Tafel gegeben für eine Reihe von Werten von p zwischen 0 und 0,5. Ihre Berechnung geschah mittels tabellarischer Integration. Das Intervall $0 \leqq \sigma \leqq \pi$ wurde dazu in 20 gleiche Teile der Breite $h = \frac{\pi}{20}$ geteilt und für jedes $\sigma = n\frac{\pi}{20}$ y, der Integrand in (2), mit Hilfe einer siebenstelligen sin- und cos-Tafel[7]) berechnet. Das Differenzenschema wurde bis zu den 6ten Differenzen ausgedehnt, wozu die Integrandenfunktion auf beiden Seiten des Intervalles um je drei Intervalle erweitert werden mußte. Zur Berechnung der Teilintegrale mit den Grenzen $2n\frac{\pi}{20}$ und $(2n+2)\frac{\pi}{20}$, sowie derjenigen mit den Grenzen $(2n+1)\frac{\pi}{20}$ und $(2n+3)\frac{\pi}{20}$ wurde die Formel[8])

$$\int_{\sigma_{-1}}^{\sigma_1} y \, d\sigma = 2h\left(y_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 - \frac{1}{180}\Delta^4 + \frac{1}{1512}\Delta^6\right)$$

verwendet, zur Berechnung der „Anschlußintegrale" $\int_0^{\frac{\pi}{20}}$ bzw. $\int_{\frac{19}{20}\pi}^{\pi}$ hingegen die Formel[9])

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} y \, d\sigma = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{12}\frac{\Delta_0^2 + \Delta_1^2}{2} + \frac{11}{720}\frac{\Delta_0^4 + \Delta_1^4}{2} - \frac{191}{60480}\frac{\Delta_0^6 + \Delta_1^6}{2}\right).$$

Nach diesem Verfahren ergaben sich die Integralwerte mit 8 zählenden Stellen nach dem Komma. Unsere Tafel wurde auf 6 Stellen abgerundet. Eine Kontrolle ließ sich bequem durchführen, da die Berechnung der Endwerte ($\sigma = \pi$) auch mit den Reihen (6) durchgeführt werden konnte[10]). Die festgestellten Abweichungen betrugen im Höchstfalle weniger als 3 Einheiten der 8. Stelle nach dem Komma. Deshalb wurde bei den Teilintegralen, bei deren Abrundung eine um den jeweils möglichen Fehler geänderte 8. Stelle die 6. beeinflußt hätte, diese unter- oder überstrichen. Eine unterstrichene 6. Stelle ist also schlimmstenfalls um 1 Einheit zu groß, eine überstrichene wäre zu klein.

4. Erweiterung für beliebiges Argument. Es sei darauf hingewiesen, daß Funktionswerte jeder der beiden Funktionen für beliebiges reelles Argument sich linear durch die Funktionswerte beider Funktionen im ersten Duanten (d. h. $0 \leqq \sigma \leqq \pi$) ausdrücken lassen.

[6]) Siehe P. Brauer a. a. O. S. 354 Gl. (20a).

[7]) Opus Palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln. Herausgegeben von Dr. W. Jordan, Hannover und Leipzig 1913.

[8]) Siehe z. B. C. Runge und H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924, S. 239 Gl. (1).

[9]) C. Runge und H. König: a. a. O. S. 241 Gl. (2).

[10]) Hierbei wurden die 10 stelligen Tafeln, herausgegeben vom Reichsamt für Landesaufnahme unter wissenschaftlicher Leitung von Prof. Dr. J. Peters, Berlin 1919 und 1922, verwendet.

Tafel der unvollständigen Angerschen Funktion $\frac{u}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma \cos p(\sin\sigma - \sigma)\,d\sigma$.

$\frac{\sigma}{\pi}$	$p=0$	$p=0,05$	$p=0,10$	$p=0,15$	$p=0,20$	$p=0,25$	$p=0,30$	$p=0,35$	$p=0,40$	$p=0,45$	$p=0,50$
0,00	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
0,05	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000	050 000
0,10	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
0,15	150 000	150 000	150 000	150 000	150 000	150 000	150 000	150 000	149 999	149 999	149 999
0,20	200 000	200 000	200 000	199 999	199 999	199 999	199 998	199 997	199 996	199 995	199 994
0,25	250 000	250 000	249 999	249 998	249 996	249 993	249 990	249 986	249 982	249 978	249 972
0,30	300 000	299 999	299 996	299 991	299 984	299 976	299 965	299 952	299 938	299 921	299 903
0,35	350 000	349 997	349 989	349 975	349 955	349 930	349 899	349 863	349 821	349 774	349 721
0,40	400 000	399 993	399 972	399 938	399 889	399 827	399 751	399 662	399 558	399 441	399 310
0,45	450 000	449 985	449 939	449 863	449 756	449 619	449 451	449 253	449 025	448 766	448 477
0,50	500 000	499 969	499 877	499 723	499 508	499 232	498 894	498 495	498 036	497 515	496 935
0,55	550 000	549 942	549 770	549 482	549 079	548 562	547 931	547 186	546 328	545 358	544 275
0,60	600 000	599 899	599 595	599 088	598 381	597 472	596 363	595 057	593 553	591 854	589 962
0,65	650 000	649 831	649 323	648 478	647 298	645 784	643 938	641 766	639 270	636 454	633 325
0,70	700 000	699 730	698 920	697 573	695 692	693 282	690 350	686 903	682 950	678 503	673 572
0,75	750 000	749 586	748 344	746 279	743 400	739 716	735 243	729 995	723 994	717 262	709 823
0,80	800 000	799 386	797 547	794 492	790 238	784 806	778 224	770 525	761 750	751 942	741 152
0,85	850 000	849 118	846 478	842 098	836 008	828 250	818 877	807 952	795 550	781 755	766 659
0,90	900 000	898 768	895 082	888 976	880 504	869 741	856 783	841 743	824 753	805 963	785 535
0,95	950 000	948 322	943 305	935 007	923 522	908 979	891 540	871 400	848 783	823 938	797 137
1,00	1 000 000	997 765	991 093	980 076	964 869	945 684	922 788	896 498	867 174	835 216	801 052

Tafel der unvollständigen Weberschen Funktion $-\frac{v}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\sigma \sin p(\sin\sigma - \sigma)\,d\sigma$.

$\frac{\sigma}{\pi}$	$p=0$	$p=0,05$	$p=0,10$	$p=0,15$	$p=0,20$	$p=0,25$	$p=0,30$	$p=0,35$	$p=0,40$	$p=0,45$	$p=0,50$
0,00	0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
0,05	0	000 000	000 001	000 001	000 002	000 002	000 002	000 003	000 003	000 004	000 004
0,10	0	000 006	000 013	000 019	000 026	000 032	000 039	000 045	000 052	000 058	000 064
0,15	0	000 032	000 065	000 097	000 130	000 162	000 195	000 227	000 260	000 292	000 325
0,20	0	000 102	000 204	000 306	000 408	000 510	000 612	000 714	000 816	000 918	001 020
0,25	0	000 247	000 494	000 742	000 989	001 236	001 483	001 730	001 977	002 225	002 472
0,30	0	000 508	001 016	001 524	002 032	002 540	003 048	003 555	004 063	004 571	005 078
0,35	0	000 931	001 862	002 793	003 724	004 655	005 585	006 515	007 445	008 375	009 304
0,40	0	001 569	003 138	004 706	006 275	007 842	009 409	010 975	012 540	014 103	015 666
0,45	0	002 478	004 956	007 434	009 909	012 383	014 855	017 324	019 789	022 251	024 709
0,50	0	003 719	007 437	011 153	014 865	018 572	022 272	025 966	029 650	033 325	036 989
0,55	0	005 353	010 702	016 046	021 380	026 703	032 010	037 300	042 568	047 813	053 031
0,60	0	007 440	014 872	022 292	029 691	037 064	044 403	051 703	058 956	066 157	073 298
0,65	0	010 040	020 066	030 064	040 021	049 923	059 757	069 509	079 165	088 714	098 142
0,70	0	013 210	026 393	039 522	052 572	065 517	078 329	090 984	103 457	115 723	127 759
0,75	0	017 001	033 953	050 809	067 519	084 036	100 315	116 309	131 973	147 266	162 145
0,80	0	021 460	042 836	064 043	084 999	105 622	125 833	145 555	164 714	183 238	201 062
0,85	0	026 625	053 111	079 317	105 108	130 351	154 915	178 677	201 520	223 334	244 015
0,90	0	032 528	064 833	096 695	127 897	158 231	187 495	215 500	242 068	267 039	290 264
0,95	0	039 190	078 038	116 206	153 366	189 201	223 413	255 724	285 879	313 652	338 848
1,00	0	046 624	092 740	137 849	181 467	223 134	262 422	298 939	332 339	362 322	388 643

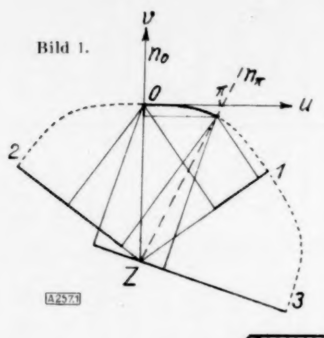
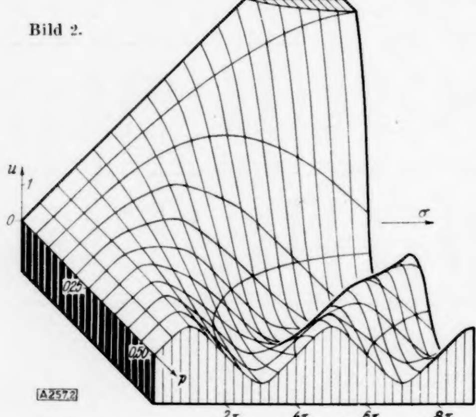
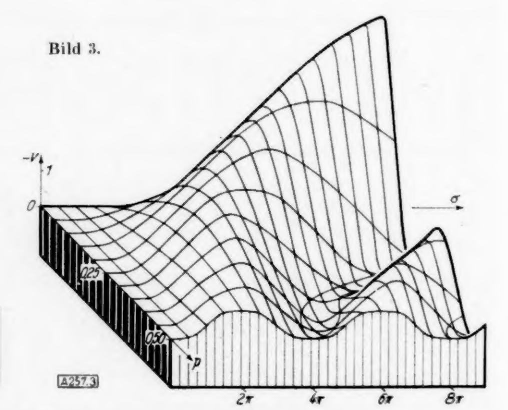


Bild 1. Zur Bestimmung von Funktionswerten für beliebiges reelles Argument. Die Ziffern 1 bis 3 bezeichnen den jeweiligen Nullpunkt des ein- bis dreimal gespiegelten Koordinatensystems, dessen v-Achse die Verbindungslinie von Z mit dem Nullpunkt ist.

Bild 2. Unvollständige Angersche Funktion.

Bild 3. Unvollständige Webersche Funktion. Darstellung der Funktionswerte mit umgekehrtem Vorzeichen.





Man gelangt dazu durch folgende elementare Überlegung. Die Kurve $\Phi(u, v) = 0$ (Bild 1) setzt sich in den Intervallen $2n\pi \leqq \sigma \leqq (2n+1)\pi$ aus gleichen Kurvenstücken, in den Intervallen $(2n+1)\pi \leqq \sigma \leqq (2n+2)\pi$ aus hierzu spiegelbildlich gleichen Kurvenstücken zusammen, wie man sofort aus der Periodizität der natürlichen Gl. (1) schließen kann. Man gelangt, wie man am einfachsten aus Bild 1 abliest, durch Spiegelung des Koordinatensystems an der Kurvennormalen n_π (Bild 1) zu einer neuen relativen Lage von Kurvenstück und Koordinatensystem, welche die zu den Argumentwerten des 2ten Duanten ($\pi \leqq \sigma \leqq 2\pi$) gehörigen Funktionswerte u und v als Koordinaten der Kurvenpunkte des ursprünglichen Kurvenstückes ablesen läßt. Für den nächstfolgenden Duanten ($2\pi \leqq \sigma \leqq 3\pi$) gelangt man durch Spiegelung des ersten Spiegelbildes an der Kurvennormalen n_0 im Anfangspunkt des Kurvenstückes zur richtigen Lage des Koordinatensystems. Durch sukzessive Befolgung dieser Vorschrift erhält man für die Funktionswerte u und v im n^{ten} Duanten ($(n-1)\pi \leqq \sigma \leqq n\pi$) auf elementarem analytischen Wege folgende einfache Ausdrücke

$$u(\sigma) = +u(\sigma')\cos n p\pi + \{v(\sigma') - v^*\}\sin n p\pi, \qquad (n \text{ gerade})$$
$$u(\sigma) = -u(\sigma')\cos(n+1)p\pi + \{v(\sigma') - v^*\}\sin(n+1)p\pi, \qquad (n \text{ ungerade})$$

bzw.

$$v(\sigma) = +u(\sigma')\sin n p\pi + \{v(\sigma') - v^*\}\cos n p\pi - v^*, \qquad (n \text{ gerade})$$
$$v(\sigma) = -u(\sigma')\sin(n+1)p\pi + \{v(\sigma') - v^*\}\cos(n+1)p\pi - v^*, \qquad (n \text{ ungerade}).$$

Hierin ist σ' der ein ganzzahliges Vielfaches von π überschreitende Betrag der Bogenlänge, also $n\pi + \sigma' = \sigma$. $u(\sigma')$ und $v(\sigma')$ sind demnach die der Tafel zu entnehmenden Funktionswerte im 1ten Duanten. v^* ist die Konstante

$$v^* = v(\pi) - u(\pi)\cot p\pi.$$

Natürlich kann man auch, wie Bild 1 lehrt, sehr schnell durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal zu den weiteren Funktionswerten gelangen, welches Verfahren zur Herstellung der Bilder 2 und 3 benutzt wurde.

Unser Dank gebührt den Herren Prof. Fritz Emde (Stuttgart) und H. Poeverlein und Dr. H. Voit (München) für nützliche Ratschläge und den Herren Prof. R. Tomaschek (München) und Prof. G. Grüß (Freiberg i. Sa.) für die freundliche Erlaubnis zur Benutzung von Rechenmaschinen. 257

Über das Photo eines Photos.

Von *Ulrich Graf* in Danzig.

Herrn Prof. Dr. E. Salkowski zum 60. Geburtstag gewidmet.

Wird ein Lichtbild eines räumlichen Motives von einer beliebigen Stelle aus unter willkürlicher Aufnahmerichtung photographiert, so ist das entstandene Bild im allgemeinen nicht mehr identisch mit einer Originalaufnahme des räumlichen Gegenstandes; dies letzte ist vielmehr nur für zwei ausgezeichnete Aufnahmerichtungen an jeder Stelle des Raumes der Fall. Das erste dieser beiden Photos gibt die Reproduktion des Lichtbildes, das zweite eine neue Originalaufnahme. Diese beiden erstrebten Bilder können durch Umzerrung aus einer willkürlichen Aufnahme gewonnen werden. Aus jedem Photo eines Photos läßt sich daher für jeden Aufnahmeort außer der Reproduktion des Lichtbildes noch eine einzige wohlbestimmte „gefälschte Originalaufnahme" des räumlichen Motives herstellen.

I. Die Photographie eines Lichtbildes.

Bei einem Lichtbildervortrag wurde aus dem Zuschauerraum das gezeigte Lichtbild photographiert. Es entstand die Frage, ob das so gewonnene „Photo eines Photos" noch identisch sein könne mit einer Originalaufnahme des im Lichtbild vorgeführten räumlichen Gegenstandes bzw. — da die perspektiven Transformationen ja nicht die Gruppeneigenschaft besitzen — welche besonderen Aufnahmebedingungen eingehalten werden müßten, um ein solches Photo eines Photos von einer Originalaufnahme ununterscheidbar zu machen. Diese Frage, deren Beantwortung die Beurteilung von photographischen Fälschungen u. ä. gestattet, ist im folgenden untersucht. Gegeben sei also ein Lichtbild eines räumlichen Gebildes. Aus einem Photo dieses Lichtbildes soll eine neue Originalaufnahme des räumlichen Motives gewonnen werden.

Eine Photographie möge dabei durch eine exakte zentralperspektive Abbildung ersetzt und weiterhin zunächst keine Rücksicht darauf genommen werden, ob das zentralperspektive Bild in solcher Nähe des Bildhauptpunktes entsteht, daß seine Realisierung mit einem der üblichen Photogeräte möglich ist. Auf diese letzte Frage wird zum Schluß eingegangen.

Das erste Photo $[P]$ des räumlichen Gegenstandes $[\mathfrak{P}]$ entstehe durch Zentralprojektion vom Zentrum O auf die Bildebene π (Bildweite d, Hauptpunkt H) (Bild 1). Jedes weitere Photo dieses Bildes kann, wenn überhaupt, nur identisch sein mit einer Originalaufnahme des räumlichen Gegenstandes, die von O als Zentrum aus gemacht ist, denn eine Aufnahme des räumlichen Motives von einem anderen Zentrum aus würde Einzelheiten der räumlichen Gestaltung aufweisen, die auf dem Bilde π und damit auch auf jedem Photo von ihm nicht zu sehen sind. Es bleibt somit zu untersuchen, welche Aufnahmen des π-Bildes identisch sind mit einer Aufnahme dieses Bildes von O selbst aus. Diese letzten Aufnahmen liefern ja, da sie als ebener Schnitt des von O ausgehenden Strahlenbündels zu dem räumlichen Gegenstand entstehen, stets Bilder, die als Originalaufnahmen des Raumgegenstandes angesehen werden dürfen.

Bild 1 (unten).

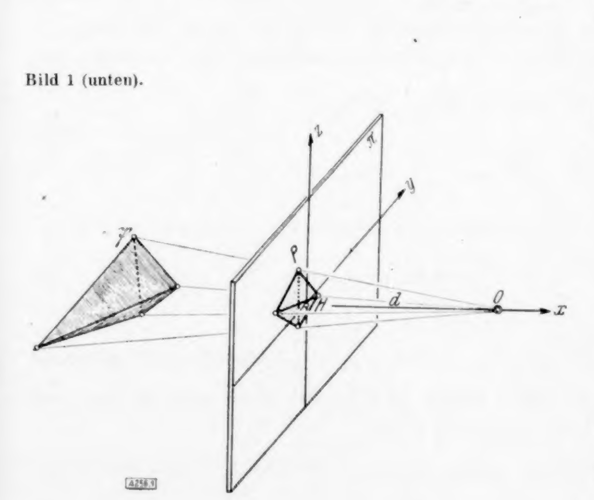
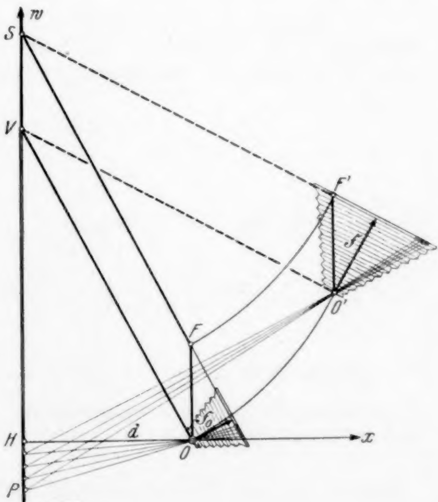


Bild 2 (rechts).



II. Die ausgezeichneten Aufnahmerichtungen.

Alle zentralperspektiven Bilder, die mit einer Aufnahme von O aus identisch sind, liefert das bekannte Parallelogrammgesetz der Perspektive (Bild 2). Ist die erste Aufnahme durch das Zentrum O, den Hauptfluchtpunkt F, den Hauptspurpunkt S und den Hauptverschwindungspunkt V gekennzeichnet, so denkt man sich diese vier Eckpunkte des Parallelogramms $OFSV$ als Gelenkpunkte. Jede kinematisch zulässige Lage $O'F'SV$, die durch Bewegung des Gelenkparallelogramms über $\overline{SV}$ als fester Grundstrecke hervorgeht, führt auf eine neue Aufnahme (Zentrum O', Hauptfluchtpunkt F', Hauptspurpunkt S, Hauptverschwindungspunkt V), die mit der Ausgangsaufnahme ($OFSV$) übereinstimmt. Zur analytischen Erfassung dieses Sachverhaltes wird ein xyz-Achsenkreuz benutzt, wie es Bild 1 zeigt: die yz-Ebene ist die Bildebene π, das Zentrum O hat die Koordinaten $x=d$, $y=z=0$. Jede perspektive Aufnahme wird durch ihren „Feldvektor" $\mathfrak{F}$ gekennzeichnet; der Aufpunkt (x, y, z) ist das Zentrum der Perspektive, die Richtung von $\mathfrak{F}$ gibt den Hauptstrahl und die Länge von $\mathfrak{F}$ die Bildweite an. $\mathfrak{F}$ ist somit der Stellungsvektor der Verschwindungsebene. Bild 2 zeigt die Lageverhältnisse in einer Ebene durch die x-Achse mit den Koordinaten x und $w=\sqrt{y^2+z^2}$. (Die Vektoren $\mathfrak{F}$ und $-\mathfrak{F}$ in demselben Aufpunkt liefern perspektive Bilder, die nur die bekannte Vertauschung von links und rechts, oben und unten aufweisen und daher als identisch angesehen werden dürfen.)

Alle Aufnahmen im Hauptzentrum O werden durch die Vektoren $\mathfrak{F}_0$ gekennzeichnet, die stets die feste Bildweitenlänge $|\mathfrak{F}_0|=f$ haben mögen. Sind α_0, β_0, γ_0 die Winkel eines solchen Vektors $\mathfrak{F}_0$ mit den drei Koordinatenachsen, so ist demnach

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}_0 &= f\cdot(\cos\alpha_0\cdot\mathfrak{i}+\cos\beta_0\cdot\mathfrak{j}+\cos\gamma_0\cdot\mathfrak{k}),\\ \cos^2\alpha_0&+\cos^2\beta_0+\cos^2\gamma_0=1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Die mit den Aufnahmen $\{\mathfrak{F}_0\}$ übereinstimmenden Aufnahmen $\{\mathfrak{F}\}$ an irgendeiner anderen Stelle x, y, z liefern insgesamt ein Vektorfeld, das rotationssymmetrisch bezüglich der x-Achse ist. Die Feldlinie für jeden Ausgangsvektor $\mathfrak{F}_0$ ist der in der Ebene

$$y\cdot\cos\gamma_0=z\cdot\cos\beta_0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gelegene Halbkreis durch O, dessen Mittelpunkt in π liegt und für den $\mathfrak{F}_0$ Tangentenvektor ist. Wird der Drehwinkel u als Parameter gewählt, so lassen sich die Feldlinien in der Form

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{d}{\sin\alpha_0}\cdot\cos u,\\ y&=\frac{d\cdot\cos\beta_0}{\sin^2\alpha_0}\cdot(\cos\alpha_0+\sin u),\\ z&=\frac{d\cdot\cos\gamma_0}{\sin^2\alpha_0}\cdot(\cos\alpha_0+\sin u)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

darstellen. Der Feldvektor im Punkt (x, y, z) ergibt sich als Tangentenvektor der Feldlinie unter Beachtung der elementargeometrisch an Bild 2 leicht zu bestätigenden Tatsache, daß

$$\left.\begin{aligned}|\mathfrak{F}|:|\mathfrak{F}_0|=|\mathfrak{F}|:f&=\sin\alpha:\sin\alpha_0=x:d,\\ |\mathfrak{F}|&=\frac{f}{d}x\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots (4)$$

ist, bei geeigneter Orientierung zu

$$\mathfrak{F}=\frac{f}{d}x\cdot\left\{-\sqrt{1-\frac{x^2}{d^2}\sin^2\alpha_0}\cdot\mathfrak{i}+\frac{x}{d}\cos\beta_0\cdot\mathfrak{j}+\frac{x}{d}\cos\gamma_0\cdot\mathfrak{k}\right\}\quad\ldots\ldots (5).$$

A. Im Falle $\cos^2\alpha_0=1$, $\cos^2\beta_0=\cos^2\gamma_0=0$ $\left(\alpha_0=\pi, \beta_0=\gamma_0=\frac{\pi}{2}\right)$ wird die in (3) gegebene Darstellung für y und z unbestimmt; in jedem Punkt (x, y, z) hat dann nach (5) der Aufnahmevektor die Gestalt

$$\mathfrak{F}'=-\frac{f}{d}x\cdot\mathfrak{i}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

(Bei entgegengesetzter Orientierung würde man die gleichwertigen Aufnahmevektoren $\mathfrak{F}' = +\frac{f}{d}\,x \cdot \mathfrak{i}$ erhalten.) Dieser triviale Sonderfall liefert also alle Aufnahmen, bei denen die Hauptstrahlen parallel zum Hauptstrahl des vorgelegten Photos sind; die neu erzeugten Photos sind einfache Reproduktionen des Ausgangsphotos. Das Vektorfeld $(\mathfrak{F}')$ ist ein Potentialfeld, denn es ist

$$\mathfrak{F}' = \operatorname{grad} \Phi' \qquad (7)$$

mit

$$\Phi' = -\frac{f}{2\,d}\,x^2 \qquad (8).$$

Bild 3a zeigt das Vektorfeld in einer Ebene durch die x-Achse. Der zu jedem Vektor $\mathfrak{F}'$ gehörige Grundvektor $\mathfrak{F}'_0$ ist $\mathfrak{F}'_0 = -f \cdot \mathfrak{i}$.

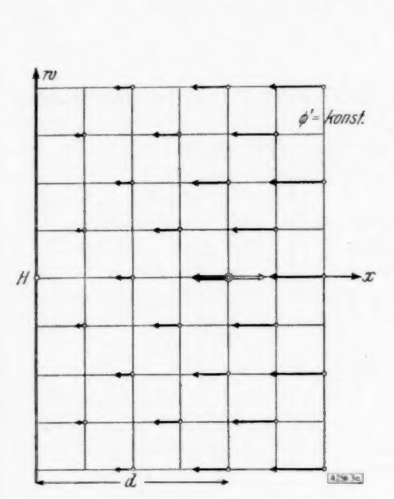
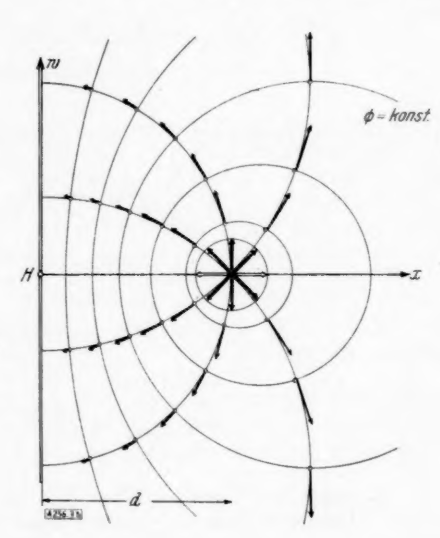


Bild 3a (links).

Bild 3b (rechts).



B. Ist $\alpha_0 \neq 0; \pi$, so ergibt die Elimination von α_0, β_0, γ_0 aus (1), (3) und (5) den Feldvektor

$$\mathfrak{F} = \frac{f}{d}\,x \cdot \frac{(x^2 - y^2 - z^2 - d^2)\cdot \mathfrak{i} + 2\,x\,y \cdot \mathfrak{j} + 2\,x\,z \cdot \mathfrak{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + d^2)^2 - 4\,d^2\,x^2}} \qquad (9).$$

Die Winkel α, β, γ dieser Aufnahmerichtung gegen die drei Achsen sind also durch

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma &= (x^2 - y^2 - z^2 - d^2) : 2\,x\,y : 2\,x\,z, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

gegeben. Ferner gilt

$$\sin\alpha : \sin\alpha_0 = x : d, \qquad \cos\beta : \cos\gamma = \cos\beta_0 : \cos\gamma_0.$$

Die Vektoren $\mathfrak{F}$ bilden ein komplex-lamellares Feld, denn es ist

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{F} = \Lambda \cdot \operatorname{grad} \Phi, \\ \text{mit}\quad &\Phi = \frac{(x-d)^2 + y^2 + z^2}{2\,x}, \\ \text{und}\quad &\Lambda = \frac{f}{d} \cdot \frac{2\,x^3}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + d^2)^2 - 4\,d^2\,x^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (11).$$

Der Maßstabsfaktor Λ bewirkt, daß der Betrag von $\mathfrak{F}$ zur Bildweite einer Perspektive wird, die mit der zugehörigen Aufnahme $\{\mathfrak{F}_0\}$ von O aus identisch ist.

Die Feldlinien sind die in (3) dargestellten Kreise, die Orthogonalflächen $\Phi = \text{const}$ sind, der geometrischen Deutung entsprechend, die Kugeln des elliptischen Kugelbüschels mit den Grundpunkten (Nullkugeln) $x = \pm d$, $y = z = 0$. Bild 3b zeigt das Vektorfeld in einer Ebene durch die x-Achse. Der zu jedem Feldvektor $\mathfrak{F}$ gehörende Grundvektor $\mathfrak{F}_0$ ist der Tangentenvektor der Feldlinie im Punkte O. Er ergibt sich zu

$$\mathfrak{F}_0 = f \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - d^2) \cdot \mathfrak{i} + 2\,d\,y \cdot \mathfrak{j} + 2\,d\,z \cdot \mathfrak{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + d^2)^2 - 4\,d^2\,x^2}} \quad \ldots \ldots \ldots (12).$$

Die durch ihn festgelegte Aufnahme des räumlichen Motives stimmt mit der Aufnahme $\{\mathfrak{F}\}$ des vorgelegten Photos überein. Die Aufnahme $\{\mathfrak{F}_0\}$ erfolgt dabei unter den Winkeln α_0, β_0, γ_0 gegen die Achsen des Bezugssystems, gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_0 : \cos\beta_0 : \cos\gamma_0 &= (x^2 + y^2 + z^2 - d^2) : 2\,d\,y : 2\,d\,z, \\ \cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (13).$$

Der durch $\mathfrak{F}_0$ bestimmte Feldlinien-(Halb)kreis hat den Mittelpunkt V mit den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} y_v &= d \cdot \frac{\cos\alpha_0 \cdot \cos\beta_0}{\sin^2\alpha_0} = \frac{y}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2 - d^2}{y^2 + z^2}, \\ z_v &= d \cdot \frac{\cos\alpha_0 \cdot \cos\gamma_0}{\sin^2\alpha_0} = \frac{z}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2 - d^2}{y^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (14)$$

und den Halbmesser

$$r = \frac{d}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + d^2)^2 - 4\,d^2\,x^2}{y^2 + z^2}} \quad \ldots \ldots (15).$$

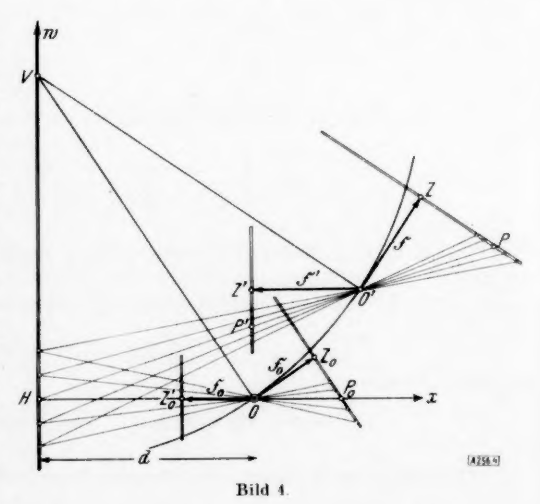


Bild 4.

An jeder Stelle des Raumes gibt es zwei Aufnahmerichtungen, unter denen sich ein Photo oder Projektionsbild eines räumlichen Motives derart photographieren läßt, daß diese neuen Aufnahmen mit Originalaufnahmen des räumlichen Motives übereinstimmen. Unter Benutzung des in Bild 1 eingeführten Koordinatensystems sind die beiden Aufnahmen im Punkte (x, y, z) durch die Vektoren $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}$ [(6) und (9)] gekennzeichnet (Bild 4). Die ersten Aufnahmelagen $\mathfrak{F}'$ ergeben als trivialen Fall die einfachen Reproduktionen (ähnliche Bilder) des vorgeführten Lichtbildes; in ihrer Gesamtheit bilden die Vektoren $\mathfrak{F}'$ ein Potentialfeld (Bild 3a). Die zweiten Aufnahmelagen $\mathfrak{F}$ ergeben vom Ausgangsbild abweichende Photos, die auch unmittelbare Aufnahmen des räumlichen Motives, und zwar von O aus unter den Winkeln α_0, β_0, γ_0 (13) gegen die drei Achsen, sein könnten. Die Vektoren $\mathfrak{F}$ bilden in ihrer Gesamtheit ein komplex-lamellares Feld (Bild 3b). Die Bildweiten $|\mathfrak{F}'|$ und $|\mathfrak{F}|$ sind so gewählt, daß die zugehörigen Originalaufnahmen von O aus die Bildweite f besitzen.

III. Die Umzerrung einer willkürlichen Aufnahme.

Eine andere Wahl der Bildweiten, durch die sich stets Potentialfelder erreichen ließen, würde nur eine ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung des Photos bedeuten; solche „gefälschten Originalaufnahmen“ lassen sich daher mit Kammern jeder Bildweite machen, und

die erforderliche Einstellschärfe läßt sich stets erzielen. Bei Aufnahmen mit starker Neigung gegen die Ebene des Projektionsbildes würde die Scheimpflugbedingung zu beachten sein. Jedoch scheitern im allgemeinen solche Aufnahmen zunächst praktisch an dem Umstand, daß dann das Bild weit entfernt vom Hauptpunkt liegt und auf der Platte unerreichbar wird.

Die Hauptpunkte der vier Aufnahmen $\{\mathfrak{F}_0'\}$, $\{\mathfrak{F}_0\}$, $\{\mathfrak{F}'\}$, $\{\mathfrak{F}\}$ seien bzw. Z_0', Z_0, Z', Z (Bild 4); der Hauptpunkt H des Projektionsbildes hat seine vier Bilder in Z_0', P_0, P', P. Diese vier Bildpunkte liegen jeweils auf denjenigen Geraden, die auf ihren Plattenebenen durch die Ebene (2) (Zeichenebene in Bild 4) ausgeschnitten werden. Eine kurze Rechnung ergibt nach (10) und (13)

$$\left.\begin{aligned} \overline{P'Z'} &= |\mathfrak{F}'| \cdot \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} = \frac{f}{d}\sqrt{y^2+z^2} = l, \\ \overline{PZ} - \overline{P_0 Z_0} &= |\mathfrak{F}| \cdot \operatorname{tg}(\alpha-\varphi) - |\mathfrak{F}_0| \cdot \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{f}{d}\sqrt{y^2+z^2} = l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16),$$

wobei φ der Winkel des zum Aufpunkt O' führenden Radiusvektors gegen die x-Achse ist. Somit ist bei den beiden Aufnahmepaaren $\{\mathfrak{F}_0'\}$, $\{\mathfrak{F}'\}$ und $\{\mathfrak{F}_0\}$, $\{\mathfrak{F}\}$ der Streckenunterschied l zwischen den Hauptpunkten Z und den Bildern P des Punktes H, d. h. des Hauptpunktes des vorgelegten Projektionsbildes, beidemal der gleiche, und zwar ist er proportional dem Abstand des Aufnahmeortes (x, y, z) vom Hauptstrahl $y = z = 0$. Wenn daher das entstehende Bild auf dem begrenzten Plattenrechteck überhaupt Platz finden soll, so lassen sich die vorgeschriebenen Aufnahmen $\{\mathfrak{F}'\}$ und $\{\mathfrak{F}\}$ nur in der unmittelbaren Umgebung dieses Hauptstrahles ausführen. Das aber würde eine starke Einschränkung der Möglichkeit bedeuten, mit den üblichen Geräten ein Photo so zu photographieren, daß das neue Bild ein Originalphoto des räumlichen Motives sein kann.

Um das Plattenrechteck voll auszunutzen, wird man das Photogerät dem Projektionslichtbild zuwenden, d. h. den neuen Aufnahmevektor $\mathfrak{B}$ in O' durch den Hauptpunkt H dieses Lichtbildes gehen lassen (Bild 5). Dann liegt $\mathfrak{B}$ auf dem Radiusvektor nach O', hat also bei der gewählten Orientierung die Form

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B} = -v \cdot \{\cos\varphi \cdot \mathfrak{i} + \cos\psi \cdot \mathfrak{j} + \cos\chi \cdot \mathfrak{k}\}, \\ &\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1, \qquad \cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = x : y : z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17),$$

wobei v die Bildweite des benutzten Gerätes bedeutet. Die so erzeugte Aufnahme $\{\mathfrak{B}\}$ läßt sich nun wiederum in die beiden geforderten Aufnahmen $\{\mathfrak{F}'\}$ und $\{\mathfrak{F}\}$ umzerren, die ihrerseits mit den Originalaufnahmen $\{\mathfrak{F}_0'\}$ und $\{\mathfrak{F}_0\}$ übereinstimmen. (In Bild 5 sind die Vektoren $\mathfrak{F}_0'$ und $\mathfrak{F}'$ in der Gegenrichtung derer in Bild 4 eingetragen, was jedoch nach dem Vorstehenden nur die Vertauschung von links und rechts, oben und unten bedeutet.)

Aus den drei Plattenebenen der Aufnahmen $\{\mathfrak{B}\}$, $\{\mathfrak{F}'\}$ und $\{\mathfrak{F}\}$ schneidet die Ebene (2) drei Geraden aus, die das Dreieck BDB' bestimmen. Für die Dreieckswinkel $\omega' = \measuredangle DB'B$ und $\omega = \measuredangle DBB'$ ergibt sich elementargeometrisch nach Bild 5

$$\omega' = \varphi, \quad \omega = \alpha - \varphi, \quad \omega + \omega' = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

und nach (10) und (17)

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\omega' = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}; \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} \cdot \frac{x^2+y^2+z^2+d^2}{x^2+y^2+z^2-d^2}; \\ &\operatorname{tg}\omega' : \operatorname{tg}\omega = (x^2+y^2+z^2-d^2) : (x^2+y^2+z^2+d^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19).$$

Aus der Aufnahme $\{\mathfrak{B}\}$ lassen sich daher durch Umprojektion auf geneigte Bildebenen die beiden geforderten Aufnahmen $\{\mathfrak{F}'\}$ und $\{\mathfrak{F}\}$ herstellen, am bequemsten in einem der photogrammetrischen Entzerrungsgeräte. Bild 6 zeigt noch einmal die beiden Einstell-Lagen, wobei

der Bauart der Geräte gemäß die Punkte A', B', C', O' bzw. A, B, C, O' als Gelenkpunkte zu denken sind, die eine kinematische Verschiebung dieser Parallelogramme gestatten und so einen Freiheitsgrad für die Scharfeinstellung gewährleisten. In Erfüllung der Scheimpflugbedingung muß die Hauptebene des Objektives O' die

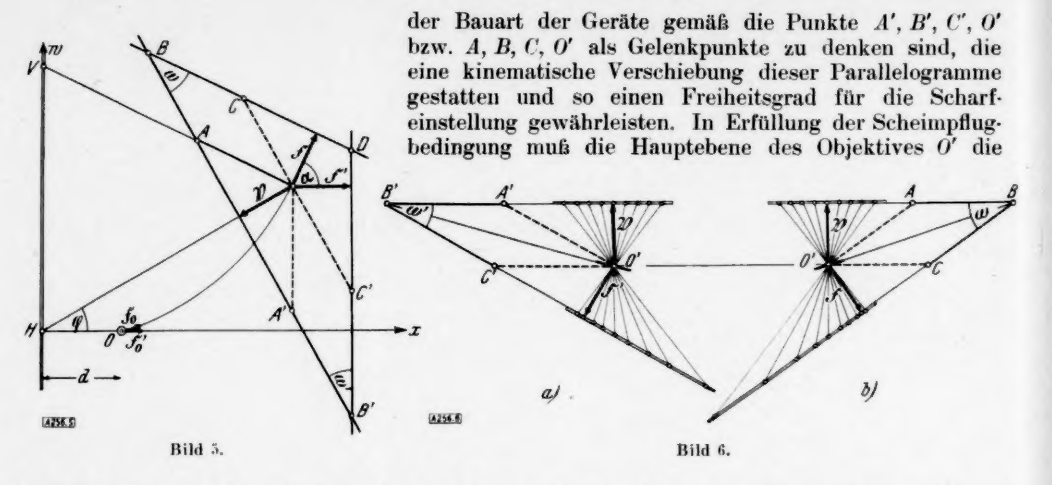


Bild 5. Bild 6.

Gerade $O'B'$ bzw. $O'B$ enthalten. Die erste Lage Bild 6a liefert dann die Entzerrung zu einer einfachen Reproduktion des Ausgangsphotos, wie es z. B. bei dem „Wiederaufrichten" lotrechter Kanten an Architekturaufnahmen aus der Ballon- oder Froschperspektive gebräuchlich ist. Die zweite Lage Bild 6b liefert ein Photo, das mit einem Originalphoto des räumlichen Motives, aufgenommen von O aus unter den Winkeln α_0, β_0, γ_0 (13) gegen die drei Achsen, übereinstimmt. Zwischen den Winkeln α_0, α, ω', ω besteht unabhängig von x, y, z, d außer (18) nach (10) und (13) die Bindung

$$\sin(\alpha - 2\omega') = \sin\alpha \cdot \left\{\cos^2\omega' + \sin^2\omega' \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha_0+\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha_0-\alpha}{2}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Der geometrische Ort aller Punkte (x, y, z), von denen aus die Aufnahmen $\{\mathfrak{F}\}$ unter dem gleichen Winkel α zu machen wären, ist nach (10) die Fläche

$$(x^2 - y^2 - z^2 - d^2)^2 = 4 \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot x^2 \cdot (y^2 + z^2).$$

Sie entsteht durch Rotation der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - 2\operatorname{ctg}\alpha \cdot x w - w^2 - d^2 = 0$$

um die x-Achse; alle diese erzeugenden Hyperbeln bilden ein Büschel, das von der Hyperbel $x^2 - w^2 = d^2$ und dem Geradenpaar $x = w = 0$ aufgespannt wird.

Der geometrische Ort aller Punkte (x, y, z), von denen aus Aufnahmen für den gleichen Winkel α_0 gemacht werden können, ist nach (13) der Torus

$$(x^2 + y^2 + z^2 - d^2)^2 = 4\, d^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha_0 \cdot (y^2 + z^2).$$

Alle diese Flächen entstehen durch Rotation der Feldlinien (3) um die x-Achse.

Wird die Aufnahme $\{\mathfrak{B}\}$ ohne Verkantung ausgeführt, also derart, daß zwei Kanten des Plattenrechtecks waagerecht liegen, so ist für die Entzerrung die Kenntnis des Winkels ν erforderlich, den die Schnittgerade der Ebene (2) und der Plattenebene mit den Höhenlinien der letzten bildet (Bild 7a). (In Bild 2 bis 6 ist stets die Ebene (2) als Zeichenebene gewählt.) Für ν erhält man (Bild 7b)

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \cdot \cos\chi = \frac{x \cdot z}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Wird ein Photo oder Projektionsbild von irgendeiner Stelle (x, y, z) aus mit zugewandter Photokammer photographiert, also derart, daß der Hauptstrahl des Gerätes durch den Hauptpunkt H des Lichtbildes geht, so läßt sich diese Aufnahme $\{\mathfrak{B}\}$ in die geforderten Aufnahmen $\{\mathfrak{F}'\}$ und $\{\mathfrak{F}\}$ umzerren. Die beiden Einstell-Lagen und die Neigungs-

winkel ω' und ω der Ebenen sind durch (19) und Bild 6 festgelegt. Die erste Lage ergibt demnach die einfache Reproduktion des Projektionsbildes, die zweite Lage ein Photo, das mit einer Originalaufnahme des räumlichen Motives von O aus unter den Winkeln α_0, β_0, γ_0 (13) gegen die Achsen übereinstimmt.

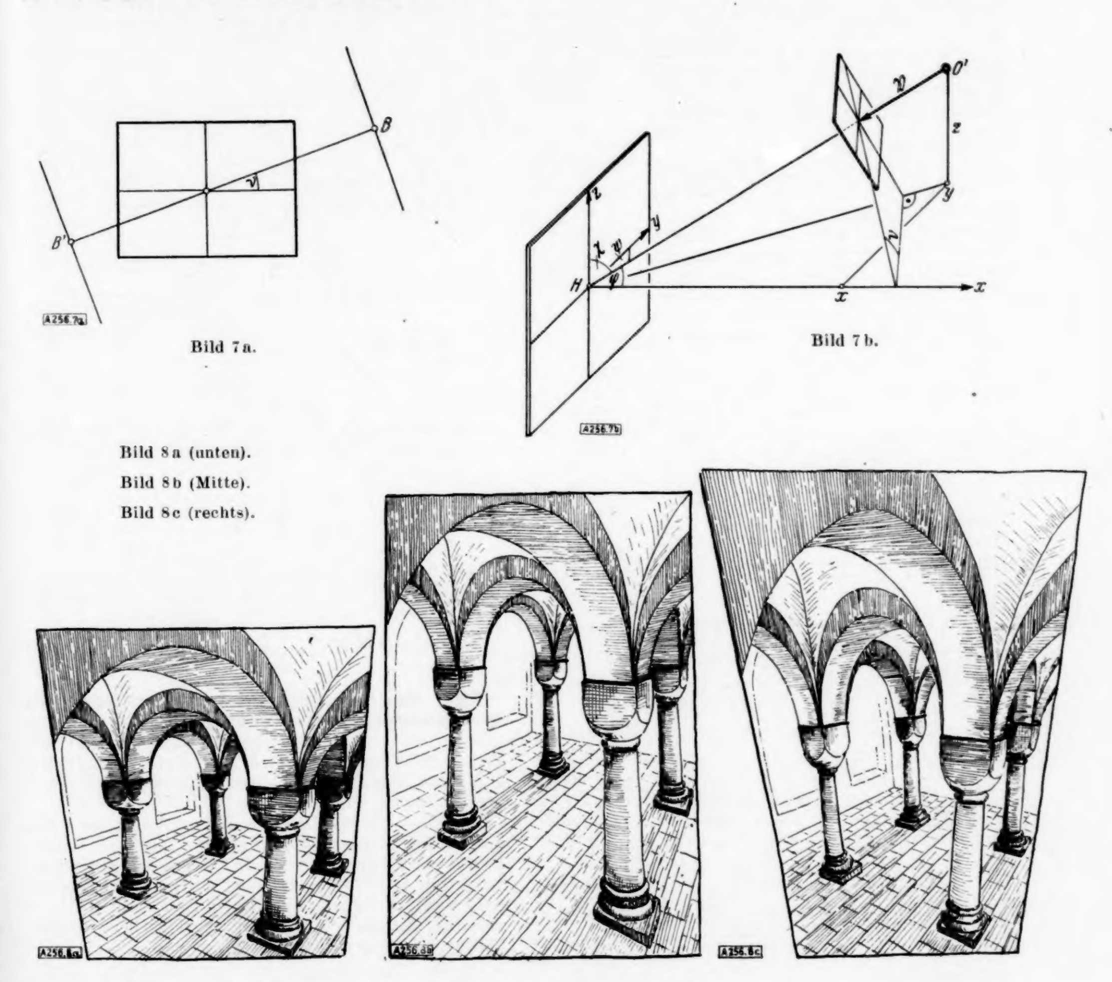


Bild 7a.

Bild 7b.

Bild 8a (unten).
Bild 8b (Mitte).
Bild 8c (rechts).

Die Bilder 8a, b, c zeigen als Beispiel solcher Photos eines Photos die Krypta in der Kirche Worms-Hochheim. (Aus reproduktionstechnischen Gründen sind die Bilder als Durchzeichnungen wiedergegeben.) Das vorgelegte Photo der Krypta hatte die Bildweite $d = 8{,}5$ cm, rekonstruiert nach bekannten elementaren Gesetzen der Zentralperspektive. Die Aufnahme $\{\mathfrak{B}\}$ dieses Photos für $x = z = 21{,}2$ cm, $y = 0$, $\omega' = \varphi = \chi = 45^\circ$, $\psi = 0^\circ$, $\nu = 90^\circ$, $|\mathfrak{B}| = 30$ cm ist in Bild 8a wiedergegeben. Die Umzerrung des Bildes 8a nach den obenstehenden Regeln ergab einerseits die Aufnahme $\{\mathfrak{F}'\}$, also die Reproduktion des Ausgangsphotos (Bild 8b) mit $|\mathfrak{F}'| = 21{,}2$ cm, andererseits die Aufnahme $\{\mathfrak{F}\}$ (Bild 8c) mit $|\mathfrak{F}| = 21{,}2$ cm, $\omega = 50^\circ$, $\alpha = 95^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 5^\circ$. Dieses Bild 8c stimmt mit einer Originalaufnahme der Krypta von O aus mit $\alpha_0 = 24^\circ$, $\beta_0 = 90^\circ$, $\gamma_0 = 66^\circ$, $f = d = 8{,}5$ cm überein.

Aus jedem Photo eines Photos läßt sich somit außer der Reproduktion des Ausgangsbildes noch eine einzige wohlbestimmte Originalaufnahme des räumlichen Motives gewinnen. Ihr wahrer Aufnahmeort ist stets derselbe wie der des vorgelegten Lichtbildes, die Aufnahmerichtung jedoch hängt von der Wahl der Stelle ab, von der aus das Lichtbild photographiert wird. Werden von einem räumlichen Motiv, etwa einem Bauwerk, zwei verschiedene geeignete Lichtbilder vorgeführt und (von einer Stelle oder auch von verschiedenen aus) photographiert, so lassen sich demnach diese beiden „Photos eines Photos" so umbilden, daß sie eine bequeme stereoskopische Auswertung in einem der photogrammetrischen Geräte gestatten.

256

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkungen zu einigen bestimmten Integralen. In dem bekannten Tafelwerk „Nouvelles Tables d'Intégrales Définies" von Bierens de Haan, Leyden 1867, sind einige bestimmte Integrale, die man in der Elastizitätstheorie der unendlich ausgedehnten Halbscheibe benötigt, falsch angegeben. Es handelt sich um folgende Richtigstellungen: Es muß heißen:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{(p^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 \text{ (Hauptwert) für } |p|<1 \\ \dfrac{\pi}{2\,|p|\,\sqrt{p^2-1}} \quad ,, \ |p|>1 \end{cases}$$

statt $\dfrac{\pi}{2\sqrt{p^2-1}}$ für $|p|>1$ in table 12 (1),

$$\int_0^1 \frac{\ln|1-p^2x^2|}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-p^2}}{2} \quad \text{für } |p|\leqq 1 \\ \pi\ln\dfrac{|p|}{2} \quad ,, \ |p|\geqq 1 \end{cases}$$

statt $-\pi\ln 2p$ für $|p|>1$ in table 119 (1).

Für $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\ln|1-p^2x^2|}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$ ist in table 119 (2) nur der Wert $\dfrac{\pi}{2}\left[\ln\dfrac{1+\sqrt{1-p^2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{1-p^2}}{1+\sqrt{1-p^2}}\right]$ für $|p|\leqq 1$ angegeben. Man braucht aber gerade den Wert für $|p|>1$, der sich zu $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p^2}+\ln\dfrac{|p|}{2}\right)$ ergibt. Diese und ähnlich gebaute Integrale lassen sich sofort angeben, wenn man p als komplexe Variable ansieht und beachtet, daß:

$$\int_0^1 f(x)\cdot\ln|1-p^2x^2|\,\mathrm{d}\,x = \Re\left(\int_0^1 f(x)\ln(1-p^2x^2)\,\mathrm{d}\,x\right)$$

gilt, sowie:

$$\int_0^1 f(x)\ln(1-p^2x^2)\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^1\int_0^p \frac{f(x)\,2\,p\,x^2}{1-p^2x^2}\,\mathrm{d}\,p\,\mathrm{d}\,x$$

$$= -2\int_0^p p\int_0^1 \frac{f(x)\,x^2}{1-p^2x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,p\,.$$

Beispiel: $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-p^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = 2\cdot\int_0^p\int_0^1 \frac{p\,x^2}{(p^2x^2-1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,p$$

$$= \int_0^p\int_0^1 \frac{1}{p}\left[2+\frac{1}{p\,x-1}-\frac{1}{p\,x+1}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,p$$

$$= \int_0^p \frac{1}{p}\left[2\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\left\{\arcsin\left(\frac{x-p}{p\,x-1}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\arcsin\left(\frac{x+p}{p\,x+1}\right)\right\}\right]_{x=0}^{1}\mathrm{d}\,p$$

$$= \pi\int_0^p\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p\sqrt{1-p^2}}\right]\mathrm{d}\,p$$

$$= \pi\cdot\left[\ln p+\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{\frac{1}{p^2}-1}\right)\right]_0^p$$

$$= \pi\cdot\ln\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{2}\,.$$

Für reelles p erhält man bei $|p|\leqq 1$ den oben angegebenen Wert, während bei $|p|\geqq 1$

$$\Re\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{2}\right) = \ln\frac{|1+i\cdot\sqrt{p^2-1}|}{2} = \ln\frac{|p|}{2}$$

folgt. Derselbe Wert ergibt sich auch, wenn man im Reellen rechnet und den Cauchyschen Hauptwert bildet.

München. Gerhard Schubert. 266

Zur Beschleunigungskonstruktion an der Heusinger-Steuerung. Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktion an der Heusinger-Steuerung wird im Schrifttum [1]) mit ähnlichen Punktreihen [2]) und fiktiven Konstruktionen [3]) durchgeführt.

Für die Geschwindigkeiten hat der Verfasser schon ein unmittelbares Verfahren ohne ähnliche Punktreihen veröffentlicht [4, 5]), die Beschleunigungskonstruktion aber wird in der vorliegenden Arbeit behandelt, wobei der Verfasser hier, wie auch in anderen Fällen [6, 7]), den Plan relativer Normalbeschleunigungen benutzt [8, 9]).

[1]) M. Grübler: Getriebelehre. Berlin 1917, Seite 81 bis 87.

[2]) R. Beyer: Technische Kinematik. Leipzig 1931, Seite 281 bis 283.

[3]) F. Wittenbauer: Graphische Dynamik, Berlin 1923, Seite 517 bis 523.

[4]) N. Rosenauer: Eine unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktion der Heusinger-Steuerung für Lokomotiven. Acta Universitatis Latviensis. Mech. I N 15, 1936.

[5]) N. Rosenauer: Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 173 bis 176.

[6]) N. Rosenauer: Die Beschleunigungskonstruktionen kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Acta Universitatis Latviensis. Mech. II N 4, 1937.

[7]) N. Rosenauer: Beschleunigungskonstruktionen kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Masch.-Bau, Reuleaux-Mitteilungen Bd. 6 (1938), S. 543 bis 546.

[8]) N. Rosenauer: Ein Beitrag zur Beschleunigungskonstruktion acht- und mehrgliedriger Gelenkketten. Acta Universitatis Latviensis. Mech. II N 14 (1939).

[9]) N. Rosenauer: Zur Beschleunigungskonstruktion acht- und mehrgliedriger Gelenkketten. Masch.-Bau, Getriebetechnik Bd. 7 (1939) S. 557 bis 560.

Die Heusinger-Steuerung besteht aus 12 Gliedern, die nach Bild 1 bezeichnet sind.

Die Abmessungen und Lagen einzelner Glieder sind so angenommen, daß die graphische Konstruktion deutlicher hervortritt.

Es wird angenommen, das Rad (Glied 1) drehe sich gleichförmig mit bekannter Geschwindigkeit gegen den Rahmen (Glied XII).

Zu ermitteln sind die Gleitbeschleunigung des Schiebers und die Beschleunigungen der Gelenkpunkte.

Um die Beschleunigungen zu konstruieren, muß man vorher die Geschwindigkeiten kennen. Dieselben sind in Bild 1 ermittelt worden, wobei einfachheitshalber die gedrehten Geschwindigkeiten der Radpunkte gleich dem Abstande vom Radzentrum angenommen sind $\overset{o}{V}_i = \overline{JO}$ und $\overset{o}{V}_h = \overline{HO}$, dann sind auch die Beschleunigungen $\overline{j}_i = \overline{JO}$ und $\overline{j}_h = \overline{HO}$.

Die Geschwindigkeitskonstruktion soll hier ganz kurz beschrieben werden (genauer s. Fußnoten 4 und 5).

Von der bekannten Geschwindigkeit des Punktes J ausgehend, werden üblicherweise die gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{\overset{o}{V}}_k$ und $\overline{\overset{o}{V}}_{34}$ des Punktes K und des Kulissenzentrums P_{34} konstruiert, darauf wird die gedrehte Geschwindigkeit $\overline{\overset{o}{V}}_q$ des Hilfspunktes Q (Schnittpunkt der Geraden AP_{34} mit dem Gliede 5) gefunden, der als Punkt des Gliedes 6 aufgefaßt wird. Weiter kann aber die Konstruktion in dieser Richtung nicht fortgesetzt werden, da der Drehpol des 6. Gliedes nicht bekannt ist. Daher wird wieder von der Geschwindigkeit des Radpunktes H ausgegangen, die gedrehte Geschwindigkeit $\overline{\overset{o}{V}}_g$ des Punktes G konstruiert und auf den Punkt F übertragen. Darauf wird die gedrehte Geschwindigkeit $\overline{\overset{o}{V}}_r$ des Hilfspunktes R (Schnittpunkt des 9. Gliedes mit der Normalen zur Gleitrichtung des Schiebers im Punkte E) gefunden, der als Punkt des Gliedes 7 aufgefaßt wird.

Bild 3 und 4.

Bild 1 und 2.

Die erhaltenen Geschwindigkeiten $\overline{\overset{0}{V}}_q$ und $\overline{\overset{0}{V}}_r$ geben die Möglichkeit zum Gelenk C, das die Glieder 6 und 7 verbindet, überzugehen und dessen gedrehte Geschwindigkeit $\overline{\overset{0}{V}}_c$ üblicherweise zu konstruieren.

Nachdem diese Geschwindigkeit erhalten ist, findet man auch alle übrigen gedrehten Geschwindigkeiten $\overline{\overset{0}{V}}_e$, $\overline{\overset{0}{V}}_d$, $\overline{\overset{0}{V}}_b$ und $\overline{\overset{0}{V}}_a^{6\,XII}$. Letztere in der Bewegung des Gliedes 6 gegen XII.

In Bild 1 sind auch nachträglich die Drehpole $P_{6\,XII}$ und $P_{7\,XII}$ der Glieder 6 und 7 als Schnittpunkte der Richtung von $\overline{\overset{0}{V}}_c$ mit dem Gliede 5 und der Normalen $n-n$ gefunden.

Zur Ermittlung der ferner nötigen Coriolis-Beschleunigung findet man $\overline{\overset{0}{V}}_a^{3\,XII}$, konstruiert die relative Geschwindigkeit $\overline{\overset{0}{V}}_a^{43}$ nach der Formel

$$\overline{\overset{0}{V}}_a^{6\,XII} = \overline{\overset{0}{V}}_a^{4\,XII} = \overline{\overset{0}{V}}_a^{43} + \overline{\overset{0}{V}}_a^{3\,XII},$$

verbindet den Punkt M mit dem Endpunkte von $\overline{\overset{0}{V}}^{43}$ und zieht durch den Endpunkt von $\overline{\overset{0}{V}}_a^{3\,XII}$ eine parallele Gerade, die die Gerade $P_{34}\,A$ im Punkte L trifft. Der Abschnitt $A\,L$ ist laut Proportion

$$\frac{A\,L}{V_a^{43}} = \frac{V_a^{3\,XII}}{M\,A} = \omega_{3\,XII}$$

die halbe Coriolis-Beschleunigung, da

$$\overline{A\,L} = [\bar{\omega}_{3\,XII} \cdot \overline{V}_a^{43}] = \frac{1}{2}\,\bar{j}_\gamma \text{ ist.}$$

Ferner bildet man die Geschwindigkeitsdifferenzen und findet mit der Halbkreiskonstruktion die relativen Normalbeschleunigungen $J\,K_1$, $H\,G_1$, $F\,D_1$, $B\,T_1$ der Glieder $J\,K$, $H\,G$, $F\,D$, $B\,T$ und $K\,M_1$, $A_1\,B$, $B\,C_1$, $D\,C_1'$, $C_2\,E$ der Geraden KM, AB, BC, DC, CE.

Ebenso konstruiert man mit $\overline{\overset{0}{V}}_a^{43}$ die Normalbeschleunigung $A\,N$ des Punktes A in der Relativbewegung 4 gegen 3.

Der Plan relativer Normalbeschleunigungen ist deutlichkeitshalber in einem zweimal größeren Maßstabe (Bild 2) folgendermaßen gezeichnet: $\overline{io} = 2\,\overline{JO}$, $\overline{ik} = 2\,\overline{JK_1}$, $\overline{km} = 2\,\overline{KM_1}$, $\Delta\,kma \backsim \Delta\,KMA$, $\overline{ab} = 2\,\overline{A_1 B}$, $\overline{bc} = 2\,\overline{BC_1}$, $\overline{ce} = 2\,\overline{C_2 E}$, $\overline{cd} = 2\,\overline{C_1' D}$, $\overline{df} = 2\,\overline{D_1 F}$, $\overline{fh} = 2\,\overline{G_1 H}$, da die Punkte f und g im Plane zusammenfallen und endlich $\overline{bt} = 2\,\overline{BT_1}$.

Die Grundeigenschaft dieses Planes besteht darin, daß die Endpunkte der Beschleunigungsvektoren zweier Punkte eines Gliedes auf einer Geraden liegen, die zur Verbindungsgeraden dieser Punkte senkrecht ist[10,11]).

Die Konstruktion der Beschleunigungen am erhaltenen Plane wird folgendermaßen durchgeführt: die Geraden durch den Punkt $o \perp i\,k$ und durch $m \perp m\,k$ gezogen ergeben den Endpunkt von $\bar{j}_k$. Eine Gerade durch den letzteren $\perp k\,a$ und eine durch $m \perp m\,a$ ergeben den Endpunkt von $\bar{j}_a^{3\,XII}$.

Von demselben trägt man laut Formel

$$\bar{j}_a^{6\,XII} = \bar{j}_a^{4\,XII} = \bar{j}_a^{43} + \bar{j}_a^{3\,XII} + \bar{j}_\gamma$$

die Coriolis-Beschleunigung $\bar{j}_\gamma = 4\,A\,L$, die Normalbeschleunigung der Relativbewegung $\bar{j}_{a\,n}^{43} = 2\,A\,N$ ab und zieht $\perp A\,P_{34}$ die Gerade $\alpha - \alpha$, auf der sich der Endpunkt von $\bar{j}_a^{6\,XII}$ befindet.

Durch den Punkt t zieht man $\perp B\,T$ die Gerade $\beta - \beta$, auf der sich der Endpunkt von $\bar{j}_b$ befindet.

Vom Punkte h trägt man $\bar{j}_h = \overline{h\,o_1} = 2\,\overline{H\,O}$ ab und zieht durch o_1 eine Gerade $\perp H\,G$ bis zum Schnittpunkte mit der Geraden, die durch den Punkt $f\,(g)$ parallel zur Gleitrichtung des Gliedes X gezogen ist. Der Abschnitt der letzteren ergibt direkt $\bar{j}_f = \bar{j}_g$, durch deren Endpunkt die Gerade $\delta - \delta \perp F\,D$ gezogen wird, auf der sich der Endpunkt von $\bar{j}_d$ befindet.

Die letzte dieser Geraden $\varepsilon - \varepsilon$, auf der sich der der Endpunkt von $\bar{j}_e$ befindet, wird direkt durch den Punkt e parallel zur Gleitrichtung des Schiebers (Glied 8) gezogen.

Weiter wird nach dem Verfahren des Verfassers[12]) zwischen den Geraden $\alpha - \alpha$ und $\beta - \beta$ beliebig die Gerade $A'\,B' \perp A\,B$ gezogen, auf derselben der Punkt C' laut Proportion $\frac{B'\,C'}{A'\,B'} = \frac{B\,C}{A\,B}$ gefunden und mit dem Schnittpunkte U' von $\alpha - \alpha$ und $\beta - \beta$ verbunden.

Ebenso wird zwischen den Geraden $\delta - \delta$ und $\varepsilon - \varepsilon$ beliebig die Gerade $D'\,E' \perp D\,E$ gezogen, auf derselben der Punkt C'' laut der Proportion

$$\frac{D'\,C''}{D'\,E'} = \frac{D\,C}{D\,E}$$

gefunden und mit dem Schnittpunkte U'' von $\delta - \delta$ und $\varepsilon - \varepsilon$ verbunden.

Der Schnittpunkt C_1 der Geraden $C'\,U'$ und $C''\,U''$ ergibt den Endpunkt der Beschleunigung des Gelenkes C, so daß $\overline{c\,C_1} = \bar{j}_c$ ist.

Durch den Punkt C_1 zieht man noch $C_1\,A_1 \parallel C'\,A'$, $D_1\,E_1 \parallel D'\,E'$ und erhält die Beschleunigungen der übrigen Gelenkpunkte: $\overline{a\,A_1} = \bar{j}_a^{6\,XII}$, $\overline{b\,B_1} = \bar{j}_b$,

$$\overline{d\,D_1} = \bar{j}_d \text{ und } \overline{e\,E_1} = \bar{j}_e.$$

Es muß noch bemerkt werden, daß die Beschleunigungen in Bild 2 in einem zweimal größeren Maßstabe erhalten sind.

A n m e r k u n g. Bei gewissen Abmessungen einzelner Glieder und in gewissen Lagen kann es vorkommen, daß die Geschwindigkeiten der Punkte der Glieder DE oder AC nahezu parallel sind. Es sind dann die Geschwindigkeitsdifferenzen sehr klein und die relativen Normalbeschleunigungen verschwinden. Das bedeutet, daß einige Punkte im Plane relativer Normalbeschleunigungen zusammenfallen. Dieser Umstand bietet jedoch kein Hindernis zur Beschleunigungskonstruktion nach diesem Verfahren.

Die Bilder 3 und 4 zeigen einen Fall, wo die Geschwindigkeiten $\overline{\overset{0}{V}}_f$, $\overline{\overset{0}{V}}_d$, $\overline{\overset{0}{V}}_c$ und $\overline{\overset{0}{V}}_e$ nahezu parallel sind.

Es fallen deshalb die Punkte c, d, e, f, g im Plane zusammen, die Beschleunigungen aber $\bar{j}_c$, $\bar{j}_d$, $\bar{j}_e$ und $\bar{j}_f$ weisen einen beträchtlichen Unterschied auf und der Beschleunigungspol Γ des Gliedes $D\,E$ ergibt sich auf der Normalen $n - n$.

Es sind zur Kontrolle in Bild 3 die Beschleunigungen $\bar{j}_c$, $\bar{j}_d$, $\bar{j}_e$ und $\bar{j}_f$ in entsprechendem Maßstabe aufgetragen und man kann sich davon überzeugen, daß die Endpunkte von $\bar{j}_d$, $\bar{j}_c$ und $\bar{j}_e$ auf einer Geraden liegen, und daß die Projektionen dieser Beschleunigungen auf die Gerade $E\,D$ gleich sind.

Ebenso sind auch die Projektionen von $\bar{j}_d$ und j_f auf $F\,D$ einander gleich.

Riga. N. R o s e n a u e r. 238.

[10]) N. R o s e n a u e r: Die Beschleunigungskonstruktionen kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Acta Universitatis Latviensis. Mech. II N 4, 1937.

[11]) N. R o s e n a u e r: Beschleunigungskonstruktionen kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Masch.-Bau, Reuleaux-Mitteilungen, Bd. 6 (1938), S. 543 bis 546.

[12]) N. R o s e n a u e r: Zur Beschleunigungskonstruktion acht- und mehrgliedriger Gelenkketten. Masch.-Bau, Getriebetechnik Bd. 7 (1939), S. 557 bis 560.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. W i l l e r s, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Z i c k f e l d t, Osterwieck am Harz.